

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Тімченко Владислав Володимирович

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота

На здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:

_____ Ю.В.Хворостіна

кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри математики, фізики та
методик їх навчання

«___» _____ 2023 року

Виконавець:

_____ В.В.Тімченко

«___» _____ 2023 року

Суми 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ДВОПАРАМЕТРИЧНІ ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ	7
1.1. Поняття числової послідовності. Збіжність послідовностей	7
1.2. Арифметична та геометрична прогресії. Їх основні властивості	12
1.3. Гармонічна, квадратична, логарифмічна та степенева прогресії	19
1.4. Рекурентні співвідношення. Числа Фібоначчі	30
Висновки до розділу 1	35
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ	36
2.1. Аналіз змістової лінії «Числові послідовності» у програмах шкільного курсу математики	36
2.2. Особливості введення основних понять з теми «Числові послідовності» у шкільних підручниках	38
2.3. Методичні вказівки до вивчення теми «Числові послідовності»	47
2.4. Практичні напрацювання з теми дослідження	55
Висновки до розділу 1	66
ВИСНОВКИ	67
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	69

ВСТУП

Актуальність теми. Вивчення теми «Числові послідовності» в шкільному курсі математики є важливою як математична основа подальшого вивчення алгебри, аналізу, дискретної математики та інших розділів математики. Ця тема вводить учнів у базові концепції математичної логіки та розвиває їх розуміння понять, таких як елемент, член послідовності, рекурентне співвідношення. Числові послідовності широко використовуються в прикладних областях, таких як фізика, економіка, комп'ютерні науки і багато інших. Розуміння принципів числових послідовностей може бути важливим для розв'язання проблем та задач у різних галузях.

Серед найпоширеніших двопараметричних числових послідовностей найпростішими є прогресії (арифметична, геометрична, квадратична гармонічна, логарифмічна та степенева) і класична послідовність Фібоначчі. Геометрична прогресія широко використовується в різних системах числення, а також у конструкціях для задання та дослідження фракталів. Класична послідовність Фібоначчі, яка є складнішою, ніж прогресії, теж може використовуватися в подібних цілях і навіть для зображення дійсних чисел.

Дослідження властивостей та закономірностей числових послідовностей сприяє розвитку логічного мислення учнів. Розв'язання вправ з цієї теми вимагає аналітичного підходу та вміння застосовувати математичні концепції для розв'язання завдань. Вивчення числових послідовностей допомагає учням розвивати абстрактне мислення, оскільки вони працюють з абстрактними концепціями та структурами даних.

Отже, вивчення числових послідовностей не лише є важливим етапом у математичній освіті, але й надає інструменти для розвитку різних аспектів їхнього когнітивного потенціалу та підготовки до подальшого вивчення математики та її застосувань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Числовими послідовностями як об'єктом дослідження і як предметом вивчення властивостей найпростіших рекурентних співвідношень цікавляться як математики-науковці так і педагоги. Так дослідженню числових послідовностей, зокрема арифметичної і геометричної прогресій присвячені роботи Лунга К.Н. [19], Лисенко Т. [17], прогресіям та їх середнім – роботи Попов Є. [33], дослідженню на збіжність послідовності – Ушаков Р.П. [39]. Розробкою тестових завдань, різного роду вправ і цікавих задач, навіть нестандартних займалися такі дослідники як Карпик В. В. [11], Лісова Т. [18], Мордкович А. Г. [25], Петровська Н. А. [32]. Такого типу завдання сприяють розвитку логічного мислення, пам'ять, нестандартність мислення, вміння узагальнювати та порівнювати. Кукуш О. Г. [16] і Ушаков Р. П. [39] займалися розробкою завдань для використання на математичних гуртків з теми «Послідовності»

Питаннями практичного застосування прогресій цікавився Ніколаєнко В. [30], у одній із робіт якого пропонується розробка уроку-семінару з алгебри для учнів 9 класу з цієї теми. Застосування геометричної прогресії в економіці займався Кошилев О. А. [14]

Мета і завдання дослідження. Мета дослідження полягає у виявленні методичних особливостей вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики.

Виходячи з мети дослідження виділено наступні завдання дослідження:

- опрацювати наукову, навчальну та методичну літературу з даної теми;
- розкрити зміст основних понять і властивостей числових послідовностей, зокрема арифметичної та геометричної прогресій;
- розширити поняття прогресій шкільного курсу алгебри для організації роботи математичного гуртка та факультативу, а саме поняттями гармонічна, квадратична, логарифмічна та степенева прогресії;

- зробити аналіз діючих навчальних програм з математики у контексті теми дослідження;
- зробити порівняльний аналіз введення основних понять з теми «Числові послідовності» у шкільних підручниках;
- розглянути методичні особливості вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики;
- розробити конспекти уроків з теми дослідження.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики учнів середньої школи.

Предметом дослідження є методичні особливості вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики.

Методи дослідження. У ході написання роботи були застосовані такі методи дослідження: абстрактно-логічний (передбачає узагальнення теоретичних основ та формулювання на їх основі висновків), табличний (аналіз чинників відбувається у вигляді таблиць), аналітичний, аналіз (виокремлення суттєвих ознак і характеристик із загального, несуттєвого), синтез (поєднання абстрагованих сторін у цілісне відображення реального стану речей).

Наукова новизна одержаних результатів. Вперше виконано порівняльний аналіз введення основних понять і тверджень деяких підручників з алгебри 9 класу. Узагальнено вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики. Розроблено конспекти уроків з теми дослідження

Практичне значення одержаних результатів. Практичне значення отриманих результатів полягає виокремленні методичних особливостей вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики. Матеріали можуть бути використані студентами педагогічних закладів вищої освіти та педагогічними працівниками під час викладання математики у шкільному курсі та для організації роботи математичного гуртка та факультативу.

Апробація результатів та публікації. За матеріалами кваліфікаційної роботи були зроблені виступи на конференціях, опубліковано тези доповідей та стаття:

– Тімченко В. Аналіз змістової лінії «Числові послідовності» у програмах шкільного курсу математики / Тімченко В., Хворостіна Ю.// Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2022 Форум молодих дослідників»: матеріали III Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (18 листопада 2022 р., м. Суми) – Суми: [СумДПУ імені А.С.Макаренка], 2022. – С. 70-71.

– Тімченко В. Гармонічна, квадратична, логарифмічна та степенева прогресії // Збірник праць студентів фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С.Макаренка. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2023. – Випуск 17. – С. 79-84.

– Тімченко В. Гармонічна, квадратична, логарифмічна та степенева прогресії // Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2023. – Випуск 17. – С.37-38.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до розділів, загального висновку, списку використаних джерел.

Повний обсяг роботи – 72 сторінки, з яких: 1 таблиця, список використаних джерел – із 40 найменувань на 4 сторінках.

РОЗДІЛ 1. ДВОПАРАМЕТРИЧНІ ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

1.1. Поняття числової послідовності

У шкільному курсі математики розглядаються переважно функції, задані на множині всіх дійсних чисел або на деяких інтервалах цієї множини. Однак, нерідко доводиться мати справу й з такими функціями, що задані на множині натуральних чисел, або на множині перших натуральних чисел. Такі функції називають *числовими послідовностями*.

Означення 1.1. *Послідовністю називають функцію, яка задана на множині всіх натуральних чисел [23].*

Означення 1.2. *Числа, які утворюють числову послідовність, називають членами послідовності.*

Якщо послідовність має скінченне число членів, то її називають скінченною, в іншому випадку – нескінченною послідовністю (у записі це показують трьома крапками після останнього члена послідовності).

4, 8, 12, 16,... - послідовність натуральних чисел кратних 4;

-1, -2, -3, -4,... - послідовність від’ємних цілих чисел.

У загальному випадку члени послідовності, позначають малими буквами з індексами внизу. Кожний індекс вказує порядковий номер члена послідовності. Саму послідовність позначають (a_n) і записують у вигляді:

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

При цьому, член a_i називають наступним за a_{i-1} , а член a_{i-1} – попереднім до a_i .

Щоб задати послідовність потрібно вказати спосіб, за допомогою якого можна знайти будь-який її член. Існують різні способи задання послідовностей: аналітичний, описовий, рекурентний, табличний та графічний.

Задати послідовність аналітично означає вказати формулу, яка дозволяє по номеру члена послідовності однозначно визначити цей член. Формула, яка дозволяє обчислити будь-який член послідовності по його номеру, називаються формулою загального члена послідовності.

Наприклад, формула загального члена

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

задає наступну числову послідовність $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

Інколи послідовність задається рекурентною формулою, яка дає можливість знаходити члени послідовності за відомими попередніми членами.

Розглянемо послідовність a_n , перший член якої рівний 1, другий – 2, а кожний член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх членів:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

Одержимо наступну послідовність: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1 + 2 = 3, a_4 = 2 + 3 = 5, a_5 = 3 + 5 = 8$ і т.д. Її називають *послідовність Фібоначчі*, а члени даної послідовності – числами Фібоначчі.

Послідовність можна задати описово, вказавши правило утворення її членів. Так, наприклад, говорять, що послідовність

$3,1; 3,14; 3,141; 3,1415, \dots$

Утворена із наближених значень числа π з точністю до

$0,1; 0,01; 0,001; 0,0001, \dots$

У подібних випадках, як правило, важко вказати формулу загального члена послідовності.

Послідовність можна задати таблицею, у якій напроти кожного члена послідовності вказують його порядковий номер. Наприклад,

n	1	2	3	4	5
a_n	-2	1	-4	1	-6

У деяких випадках зручно використовувати графічний спосіб задання послідовності. Для наочності члени послідовності зображують точками на координатній площині: при цьому позначають кожну точку залежно від того, якому члену послідовності вона відповідає.

Як і будь-яка функція, послідовність може мати деякі специфічні властивості: монотонність, обмеженість, періодичність.

Означення 1.3. *Послідовність (a_n) називається монотонною, якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується одна з умов: $a_{n+1} \geq a_n$ або $a_{n+1} \leq a_n$.*

У першому випадку послідовність називають монотонно не спадною, а в другому – монотонно не зростаючою. Якщо $a_{n+1} > a_n$ або $a_{n+1} < a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то говорять, що послідовність $\{a_n\}$ строго монотонна і зростає в першому випадку та спадає в другому відповідно [1,456].

Означення 1.4. *Послідовність (a_n) називається обмеженою, якщо існують такі числа c та C , що для всіх членів послідовності виконується нерівність $c \leq a_n \leq C$.*

Послідовність для якої існує таке число C , що для всіх її членів виконується нерівність $a_n \leq C$, називається обмеженою зверху. Аналогічно, послідовність називається обмеженою знизу, якщо існує таке число c , що для всіх членів послідовності виконується нерівність $a_n \geq c$. Таким чином коли говорять, що послідовність обмежена, мають на увазі, що вона обмежена зверху або знизу [1,456].

Якщо існує таке натуральне число T , що починаючи з деякого n , виконується рівність $a_n = a_{n+T}$, послідовність називається періодичною, а

T – довжиною періоду [1,456].

Прикладом періодичної послідовності може бути послідовність, яка складається з однакових членів, наприклад послідовність одиниць. Найменший додатний період такої послідовності $T=1$. Якщо взяти послідовність $((-1)^n)$,

тобто послідовність чисел $\{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$, то її найменшим додатним періодом буде число $T=2$.

Зрозуміло, що більшість послідовностей не є періодичними. Зокрема, неперіодичними є послідовності натуральних та простих чисел (але ці послідовності строго монотонні, обмежені знизу і необмежені зверху).

Використовуючи поняття монотонності, обмеженості та періодичності можна описати деякі спеціальні властивості послідовностей.

1. Якщо послідовність (a_n) – монотонно зростаюча, то послідовність $(-a_n)$ – монотонно спадна і навпаки.
2. Якщо послідовність (a_n) – монотонно не зростаюча, то послідовність $(-a_n)$ – монотонно не спадна і навпаки.
3. Монотонно зростаюча послідовність обмежена знизу, монотонно спадна – обмежена зверху.
4. Монотонно зростаюча або монотонно спадна послідовність не може бути періодичною.
5. Періодична послідовність завжди обмежена.

Означення 1.5. Дійсне число a називається границею послідовності (a_n) , якщо для довільного дійсного додатного числа ε існує такий номер n_0 (взагалі, залежний від ε , тобто $n_0(\varepsilon)$), що для всіх номерів n , більших $n_0(\varepsilon)$, виконується нерівність

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

За допомогою логічної символіки це означення можна записати так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon \in R^+ \exists n_0 \in N \forall n \in N (n > n_0 \implies |a_n - a| < \varepsilon)$$

Число $\varepsilon > 0$ характеризує «ступінь близькості» членів послідовності (a_n) до границі a , а число $n_0(\varepsilon)$ показує, що члени послідовності з номерами, більшими n_0 , будуть від числа a на віддалі, меншій ε [17].

Означення 1.6. *Послідовність, яка має границю, називається, збіжною. Послідовність, яка не має границі, називається розбіжною.*

Прикладом розбіжної послідовності є послідовність $a_n = 2^n$. Взагалі, будь-яка необмежена послідовність, є розбіжною, бо для кожного інтервалу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ знайдеться безліч членів такої послідовності, які не попадуть в цей інтервал.

Слід зазначити, що розбіжні послідовності є і серед обмежених послідовностей. Наприклад, обмежена послідовність $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots, -1, 1, \dots)$ також розбіжна, оскільки в кожному інтервалі $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, у якого $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, не попадуть або -1 , або 1 , оскільки довжина інтервалу менша 1 [17].

Означення 1.7. *Послідовність, границя якої дорівнює нулю, називається нескінченно малою або нульовою послідовністю.*

Теорема 1.1. (про єдиність границі). *Якщо послідовність має границю, то лише одну.*

Теорема 1.2. *Кожна збіжна послідовність обмежена.*

Наслідок 1.1. *Кожна розбіжна послідовність необмежена.*

Теорема 1.3. (про арифметичні операції над збіжними послідовностями). *Якщо послідовності (a_n) і (b_n) збіжні, то збіжними будуть послідовності $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, а при додатковій умові $(b_n) \neq 0$ для $\forall n \in N$ і*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \neq 0$$

збіжна і послідовність $(\frac{a_n}{b_n})$, причому мають місце формули:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n ;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Теорема 1.4. (про границю проміжної послідовності). Якщо для послідовностей $(a_n), (b_n), (c_n)$ виконуються умови

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

Теорема 1.5. (про границю монотонної послідовності). Кожна монотонна обмежена послідовність має границю [17].

1.2. Арифметична та геометрична прогресії. Їх основні властивості

Особливе місце серед послідовностей займають прогресії – послідовності, складені за певним правилом. Термін «прогресії» (з латини «progression») перекладається як «рух уперед, приріст». Найвідомішими видами прогресій є арифметична та геометрична прогресії.

Означення 1.8. Арифметична прогресія – це послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число d (різниця арифметичної прогресії) [3,63].

Зрозуміло, що число d є різницею будь-яких сусідніх $(n+1)$ -го та n -го членів арифметичної прогресії (a_n) : $d = a_{n+1} - a_n$. Взагалі, якщо a_i та a_j - два дані члени арифметичної прогресії a_n , причому $i < j$, то

$$d = \frac{a_j - a_i}{j - i}$$

Перший член і різниця арифметичної прогресії можуть бути якими завгодно числами. Будь-який член арифметичної прогресії можна знайти, знаючи перший її член і різницю, за формулою n -го члена арифметичної прогресії

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad (1.1)$$

Із цієї формули випливає формула знаходження j члена арифметичної прогресії через будь-який із попередніх:

$$a_j = a_i + d(j - i) \quad (1.2)$$

Для того, щоб вивести формулу n -го члена арифметичної прогресії, запишемо арифметичну прогресію у вигляді:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, a_1 + 5d, \dots,$$

Тобто $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, a_5 = a_1 + 4d, a_6 = a_1 + 5d, \dots$, і при цьому звернемо увагу на те, що коефіцієнт при d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії. Застосовуючи далі метод математичної індукції, неважко довести, що n -ий член арифметичної прогресії можна знайти за формулою:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad (1.3)$$

Приклад 1.1. [15, 176] Чи є число 181 членом арифметичної прогресії, у якій $a_1 = 3, d = 5$?

Розв'язання. Число 181 буде членом арифметичної прогресії, якщо існує таке натуральне число n – порядковий номер члена прогресії, що $a_n = 181$.

Оскільки $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то

$$181 = 3 + (n - 1) \times 5. \text{ Розв'яжемо рівняння відносно } n:$$

$$181 = 3 + 5(n - 1)$$

$$181 = 3 + 5n - 5, n = 36,6.$$

Число 36,6 не є натуральним, тому число 181 не є членом даної арифметичної прогресії.

Розглянемо тепер основні властивості арифметичної прогресії з першим членом a_1, n – ім членом і різницею d .

- 1) Якщо різниця арифметичної прогресії є числом додатним ($d > 0$), то арифметична прогресія є зростаючою; якщо різниця арифметичної прогресії

є числом від'ємним ($d < 0$); якщо різниця арифметичної прогресії дорівнює нулю ($d = 0$), то прогресія є сталою (усі її члени рівні).

Наприклад, дана арифметична прогресія: 11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, ..., є спадною послідовністю з різницею $d = -2$.

- 2) Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному сусідніх з ним членів [15, 171].

Доведення [15]. Нехай маємо арифметичну прогресію (a_n) з різницею d . Тоді для натуральних значень $n > 1$ виконуються рівності:

$$a_n - a_{n-1} = d, \quad a_{n+1} - a_n = d.$$

$$\text{Звідси маємо: } a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n, \quad 2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}.$$

$$\text{Таким чином, } a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2} \quad \blacksquare$$

- 3) Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі крайніх членів [15, 172].

Доведення [15]. Для доведення візьмемо скінченну арифметичну прогресію з n членів: $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\}$.

$$\begin{aligned} a_i + a_{n-i+1} &= a_1 + (i-1)d + a_1 + (n-i)d = a_1 + id - d + a_1 + nd - id = \\ &= a_1 + (a_1 + (n-1)d) = a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Отже, сума i -го та $(n-1+1)$ -го членів арифметичної прогресії дорівнюють сумі крайніх членів. $\blacksquare$

Приклад 1.2. Нехай маємо скінченну арифметичну прогресію (a_n) , яка складається з 7 членів: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Знайдемо суму крайніх членів прогресії і суму членів рівновіддалених від крайніх:

$$a_1 + a_7 = 3 + 15 = 18$$

$$a_2 + a_6 = 5 + 13 = 18$$

$$a_3 + a_5 = 7 + 11 = 18$$

$$a_4 + a_4 = 9 + 9 = 18$$

4) Сума n перших членів арифметичної прогресії визначається за формулою:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ або } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad (1.4)$$

Доведення [15]. Позначимо $a_1 + a_n = m$. Тоді $a_2 + a_{n-1} = m$,

$$a_3 + a_{n-2} = m.$$

Враховуючи це, додамо почленно дві рівності:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = m + m + m + \dots + m + m + m$$

$$2S_n = m \cdot n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Звідси отримаємо потрібну формулу обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad (1.5)$$

Оскільки $a_n = a_1 + d(n-1)$, одержуємо ще одну формулу, яка дозволяє знайти суму n -перших членів арифметичної прогресії, знаючи її перший член та різницю:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad (1.6)$$

■

Теорема 1.6. *Арифметична прогресія збіжна тоді і тільки тоді, коли її різниця d дорівнює 0, причому її границя дорівнює першому члену.*

Доведення. Нехай $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d, \dots$ довільна арифметична прогресія з першим членом a_1 і різницею d .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + (n-1)d) = a_1 + d + d \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n.$$

При $d \neq 0$ границя n -ого члена арифметичної прогресії розбігається. Лише при $d = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1.$$

■

Означення 1.9. Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те ж число.

Це число називається знаменником геометричної прогресії і позначається q (початкова буква французького слова «quoti» – частка) [3, 95].

Отже, якщо $(b_n) = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ – геометрична прогресія, то

$b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_2 \cdot q$. Тобто для будь-якого натурального виконується рівність

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \quad (1.7)$$

З означення геометричної прогресії випливає, що частка від ділення будь-якого її члена починаючи з другого на попередній член дорівнює одному й тому ж числу – знаменнику q , тобто $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Правильним є й обернене твердження: якщо у деякій послідовності частка від ділення будь-якого її члена, починаючи з другого, на попередній член дорівнює одному й тому ж числу, то така послідовність є геометричною прогресією.

Звернемо увагу, що кожен арифметичну прогресію з різницею 0 можна вважати також геометричною прогресією зі знаменником 1.

Геометрична прогресія з першим членом b_1 і знаменником q має наступні перші члени: $b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, b_1q^4, \dots$. Її другий член дорівнює $b_2 = b_1q$, третій – $b_3 = b_1q^2$, n -ий член – $b_n = b_1q^{n-1}$. Остання рівність називається формулою n -го члена геометричної прогресії.

Приклад 1.3. [3,69] Перший і сьомий члени геометричної прогресії дорівнюють відповідно 81 і $\frac{64}{9}$. Знайти її знаменник q .

Розв'язання. За формулою n -го члена геометричної прогресії маємо:

$$b_7 = b_1q^6$$

$$\frac{64}{9} = 81 \cdot q^6$$

$$q^6 = \frac{64}{9 \cdot 81}$$

$$q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$q = \frac{2}{3} \text{ або } q = -\frac{2}{3}$$

Відповідь: $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$.

Розглянемо основні властивості геометричної прогресії (b_n) та її членів:

- 1) Якщо знаменник геометричної прогресії $0 < q < 1$, то прогресія є спадною; якщо знаменник геометричної прогресії $q > 1$, то прогресія є зростаючою; якщо знаменник прогресії дорівнює одиниці ($q = 1$), то прогресія є сталою.
- 2) Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів [16, 155].

Доведення [16]. Нехай маємо геометричну прогресію (b_n) зі знаменником q .

Тоді для $n > 1$ виконуються рівності

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = q, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = q.$$

Звідси $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$, і тому $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$. Якщо всі члени геометричної прогресії є додатними числами, то з рівності $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$ випливає

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}} \quad (1.8)$$

Отже, кожний член такої прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів. ■

- 3) Добуток членів геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів однакові й дорівнюють, добутку крайніх членів [16, 166].

Доведення [16]. Нехай геометрична прогресія (b_n) має n членів. Члени прогресії, що стоять на k -му місці від початку та k -му місці від її кінця, відповідно дорівнюють $b_k = b_1 q^{k-1}$ та $b_{n-k+1} = b_1 q^{n-k}$.

Розглянемо їх добуток: $b_n \cdot b_{n-k+1} = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{n-k} = b_1 b_1 q^{k-1} = b_1 b_n$.

■

4) Сума n перших членів геометричної прогресії визначається з рівності:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (1.9)$$

Остання рівність дає нам формулу обчислення суми n перших членів геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником $q \neq 1$. Якщо $q = 1$, то цією формулою користуватися не можна. У цьому випадку кожен член геометричної прогресії дорівнює b_1 і $S_n = nb_1$.

Теорема 1.7. *Геометрична прогресія збіжна тоді і тільки тоді, коли модуль її знаменника q менший за одиницю або $q=1$, причому, коли $|q| < 1$, то границя цієї послідовності дорівнює нулю, а при $q=1$ послідовність збігається до b_1 .*

Доведення. Нехай $b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots, b_1 q^{n-1}, \dots$ довільна геометрична прогресія з першим членом b_1 і знаменником q . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_1 q^{n-1} = b_1 \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1}.$$

Якщо $|q| > 1$ або $q = -1$, то послідовність є розбіжною.

При $|q| < 1$ границя n -ого члена геометричної послідовності дорівнює нулю.

При $|q| = 1$ границя n -ого члена дорівнює першому члену геометричної прогресії b_1 . ■

Означення 1.10. *Нескінченно спадною геометричною прогресією називають геометричну прогресію, у якій знаменник $|q| < 1$ і яка містить нескінченну кількість членів.*

Означення 1.11. *Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії називається границя суми n перших її членів, при $n \rightarrow \infty$.*

5) Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії обчислюється за формулою: $S = \frac{b_1}{1-q}$

Приклад 1.4. Обчислити суму нескінченно спадної геометричної прогресії $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$

Розв'язання. За умовою $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Відповідь: 2.

1.3. Гармонічна, квадратична, логарифмічна та степенева прогресії

Існують і інші прогресії, а саме: гармонічна прогресія, квадратична, логарифмічна та степенева прогресії.

Означення 1.12. *Гармонічною прогресією називається послідовність виду*

$$\left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \dots, \frac{1}{a+d(n-1)}, \frac{1}{a+nd}, \dots \right\}, a \neq 0. \quad [28]$$

Очевидно, що числа, обернені до гармонічної прогресії утворюють арифметичну прогресію $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(n-1)d, \dots\}$.

Якщо відомі два перші члени скінченної гармонічної прогресії, можна обчислити її n -ий член, бо за означенням гармонічної прогресії числа, обернені до $a_1, a_2, \dots, a_n$, де $a_1 = \frac{1}{a}$, $a_2 = \frac{1}{a+d}$, $a_n = \frac{1}{a+nd}$, цієї прогресії утворюють арифметичну прогресію.

Використовуючи формулу знаходження n перших членів арифметичної прогресії маємо:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} \right) (n-1)$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{a_1(n-1) - a_2(n-2)}{a_1 a_2}$$

Таким чином, n -й член гармонічної прогресії можна знайти за формулою:

$$a_n = \frac{a_1 a_2}{a_1(n-1) - a_2(n-2)} \quad (1.10)$$

Неважко довести, що у скінченній гармонічній прогресії сума двох чисел, обернених рівновіддаленим від кінців прогресії членам, є величина стала для даної прогресії.

Суму перших членів гармонічної прогресії можна знайти, використовуючи формулу суми арифметичної прогресії, яку утворюють числа, обернені до членів даної гармонічної прогресії. Підставивши у формулу суми n перших членів арифметичної прогресії значення членів гармонічної прогресії, отримаємо: $S = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n}}{2} \cdot n$, звідки

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2 a_1 a_n} \cdot n \quad (1.11)$$

Теорема 1.8. *Гармонічна прогресія збіжна, причому при $d \neq 0$ її границя дорівнює нулю, а при $d = 0$ – дорівнює її першому члену.*

Доведення. Нехай $\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \dots, \frac{1}{a+d(n-1)}, \frac{1}{a+nd}$ довільна гармонічна прогресія.

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a + nd} = \frac{1}{a + d \lim_{n \rightarrow \infty} n}$$

Якщо $d \neq 0$, то границя гармонічної прогресії дорівнює нулю.

При $d = 0$ – границя дорівнює першому члену прогресії.

■

Приклад 1.5. Скласти гармонічну прогресію, яка містить $m+2$ члени, якщо крайні члени її дорівнюють a і b .

Розв'язання. Розглянемо арифметичну прогресію, перший і останній член якої дорівнюють відповідно $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$. Нехай кількість членів цієї прогресії теж $m+2$, тоді її різниця $d = \frac{a-b}{ab(m+1)}$.

Запишемо відповідну арифметичну прогресію:

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a} + \frac{a-b}{ab(m+1)}, \frac{1}{a} + \frac{2a-b}{ab(m+1)}, \frac{1}{a} + \frac{3a-b}{ab(m+1)}, \dots, \frac{1}{b}$$

або

$$\frac{1}{a}, \frac{bm+a}{ab(m+1)}, \frac{b(m-1)+2a}{b(m-1)+2a}, \frac{ab(m+1)}{b(m-2)+3a}, \dots, b.$$

Звідси можемо дістати гармонічну прогресію:

$$a, \frac{ab(m+1)}{bm+a}, \frac{ab(m+1)}{b(m-1)+2a}, \frac{ab(m+1)}{b(m-2)+3a}, \dots, b,$$

Нехай, наприклад, між числами 4 і 16 слід вставити три числа так, щоб дістати гармонічну прогресію. Різниця d відповідної арифметичної прогресії дорівнюватиме $d = \frac{4-16}{64(3+1)} = -\frac{3}{64}$. Отже, арифметична прогресія буде виглядати наступним чином: $\frac{1}{4}, \frac{13}{64}, \frac{5}{32}, \frac{7}{64}, \frac{1}{16}$, а шукана гармонічна прогресія матиме вигляд: $4, \frac{64}{13}, \frac{32}{5}, \frac{64}{7}, 16$.

Означення 1.13. *Послідовність, в якій квадрат кожного члена, починаючи з другого, дорівнює сумі квадрата попереднього члена та одного й того самого числа, називається квадратичною прогресією.*

У квадратичній прогресії $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots\}$ кожний член, починаючи з другого, є середнім квадратичним двох сусідніх членів, тобто

$$a_n = \sqrt{\frac{a_{n-1}^2 + a_{n+1}^2}{2}} \quad (1.12)$$

Покажемо, що послідовність, складена з квадратів членів квадратичної прогресії, утворює арифметичну прогресію.

Доведемо спочатку, що загальний член квадратичної прогресії визначається за формулою:

$$a_n = \sqrt{a_1^2 + d(n-1)} \text{ або } a_n^2 = a_1^2 + d(n-1)$$

Застосуємо метод математичної індукції. Очевидно, що при $n = 1$ рівність правильна: $a_1 = a_1$.

Припустимо, що вона правильна для n -го члена, тобто

$$a_n^2 = a_1^2 + d(n-1)$$

Доведемо її для $(n+1)$ -го члена. За означенням квадратичної прогресії: $a_{n+1}^2 = a_n^2 + d$. Використовуючи припущення, маємо:

$$a_{n+1}^2 = a_1^2 + d(n-1) + d, \text{ звідси ми отримуємо}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_1^2 + nd}$$

Отже, вказана формула правильна для будь-якого n . ■

Теорема 1.9. Квадратична прогресія збіжна тоді і тільки тоді, коли $d = 0$, причому її границя дорівнює $|a_1|$.

Доведення. Нехай $a_1, \sqrt{a_1^2 + d}, \sqrt{a_1^2 + 2d}, \dots, \sqrt{a_1^2 + d(n-1)}$ довільна квадратична прогресія.

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_1^2 + d(n-1)}$$

При $d = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_1^2 + d(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_1^2} = |a_1|$$

■

Приклад 1.6. Задана квадратична прогресія $\sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{11}, \dots$. Знайти її 10-й член.

Розв'язання. Користуючись доведеною формулою

$$a_{10} = \sqrt{3 + 4 \cdot 9} = \sqrt{39}$$

Відповідь: $a_{10} = \sqrt{39}$

Доведемо тепер, що у скінченній квадратичній прогресії, сума квадратів членів, рівновіддалених від кінців, є величиною сталою для даної прогресії.

Справді, суми квадратів членів прогресії:

$a_1, \sqrt{a_1^2 + d}, \sqrt{a_1^2 + 2d}, \dots, \sqrt{a_1^2 + d(n-2)}, \sqrt{a_1^2 + d(n-1)}$, рівновіддалених від її кінців, дорівнює

$$\begin{aligned} a_1^2 + \left(\sqrt{a_1^2 + d(n-1)} \right)^2 &= \left(\sqrt{a_1^2 + d} \right)^2 + \left(\sqrt{a_1^2 + d(n-2)} \right)^2 = \\ &= 2a_1^2 + d(n-1) \end{aligned}$$

З цієї властивості випливає формула знаходження суми квадратів членів квадратичної прогресії:

$$S = \frac{2a_1^2 + d(n-1)}{2} \cdot n \quad (1.13)$$

$$S = \frac{a_1^2 + a_n^2}{2} \cdot n \quad (1.14)$$

Приклад 1.7. Побудувати квадратичну прогресію, якщо перший та останній її члени дорівнюють відповідно a та b , а кількість членів $m + 2$.

Розв'язання. Складемо арифметичну прогресію перший та останній член якої дорівнює відповідно a^2 та b^2 , а кількість членів $m + 2$. Тоді її різниця:

$$d = \frac{a^2 - b^2}{m + 1}$$

Отже, шукана арифметична прогресія матиме вигляд:

$$a^2, a^2 + \frac{a^2 - b^2}{m + 1}, a^2 + \frac{2(a^2 - b^2)}{m + 1}, a^2 + \frac{3(a^2 - b^2)}{m + 1}, \dots, b^2$$

або

$$a^2, \frac{mb^2 + a^2}{m + 1}, \frac{(m-1)b^2 + 2a^2}{m + 1}, \frac{(m-1)b^2 + 3a^2}{m + 1}, \dots, b^2$$

Отже, квадратична прогресія матиме вигляд:

$$a, \sqrt{\frac{mb^2 + a^2}{m+1}}, \sqrt{\frac{(m-1)b^2 + 2a^2}{m+1}}, \sqrt{\frac{(m-1)b^2 + 3a^2}{m+1}}, \dots, b$$

По аналогії з квадратичною прогресією можна визначити кубічну, біквадратичну прогресії, прогресію 5-го степеня.

Означення 1.14. Середнім логарифмічним чисел $a > 1, b \geq 1$ (або чисел $a < 1, b \leq 1$) називають вираз:

$$a^{\pm \sqrt{\log_a b}} \quad (1.15)$$

Середнє логарифмічне чисел $a > 1, b \geq 1$ не перевищує їх середнього геометричного. Справді, в цьому разі для чисел a та b за відомою нерівністю Коші маємо:

$$\sqrt{\log_a a \cdot \log_a b} \leq \frac{\log_a a + \log_a b}{2} \quad (1.16)$$

Потенціюючи праву частину цієї нерівності і беручи до уваги, що $\log_a a = 1$, отримаємо:

$$\sqrt{\log_a b} \leq \log_a \sqrt{ab}$$

Відповідно, при $0 < a < 1$ і $0 < b \leq 1$ матимемо:

$$\sqrt{ab} \leq a^{\sqrt{\log_a b}}$$

Означення 1.15. Послідовність, в якій кожний член, починаючи з другого, дорівнюватиме одному й тому самому степеню k попереднього члена, називають логарифмічною прогресією [28].

Отже, за означенням членами логарифмічної прогресії є числа

$$a, a^k, (a^k)^k, (a^{k^2})^k, \dots \quad \text{або} \quad a, a^k, a^{k^2}, a^{k^3}, \dots \quad (\text{де } a \neq 1 \text{ і } a > 0)$$

Прикладом логарифмічної прогресії є послідовність $3, 3^2, 3^4, \dots, 3^{2^m}, 3^{4^m}$.

У логарифмічній прогресії кожний член, починаючи з другого, дорівнює середньому логарифмічному двох сусідніх членів. У наведеній вище прогресії член 3^{2^m} - середнє логарифмічне членів 3^m і 3^{4^m} :

$$(3^m)^{\sqrt{\log_3 3^4}} = 3^{2^m}$$

Методом математичної індукції неважко довести, що загальний член такої прогресії виражається формулою:

$$a_n = a_1 k^{n-1} \quad (1.17)$$

У скінченій логарифмічній прогресії добуток показників степенів членів, рівновіддалених від кінців прогресії є величиною сталою. Звідси, логарифмічну прогресію можна розглядати як геометричну відносно логарифмів членів логарифмічної прогресії. Іншими словами, якщо члени послідовності $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots\}$ становлять логарифмічну прогресію, то послідовність, складена з логарифмів членів цієї прогресії, взятих за додатною, відмінною від одиниці основою, становить геометричну прогресію. Справді, логарифмічну прогресію $a_1, a_2, \dots, a_n$ можна подати у вигляді:

$$a^{\log_a a_1}, a^{\log_a a_2}, \dots, a^{\log_a a_n} \quad (1.18)$$

звідки, за означенням, послідовність складена з показників степенів членів цієї прогресії $\log_a a_1, \log_a a_2, \dots, \log_a a_n$ утворює геометричну прогресію.

Суму логарифмів $1 + k + k^2 + \dots + k^{n-1}$ членів скінченної логарифмічної прогресії можна визначити за однією з формул суми членів геометричної прогресії:

$$S = \frac{1-k^n}{1-k} = \frac{k^n-1}{k-1} \quad (1.19)$$

Як вже зазначалось, що множина членів геометричної прогресії становить правильну частину множини членів такої арифметичної прогресії, в якій перший член і різниця рівні між собою. Наприклад, множина членів геометричної прогресії 3, 9, 27, ... є підмножиною членів арифметичної прогресії 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27,

Геометрична прогресія, в якій перший член і знаменник дорівнюють один одному, містить як правильну частину – логарифмічну прогресію. Наприклад, перший, другий і четвертий члени геометричної прогресії 5, 25, 125, 625, становлять логарифмічну прогресію.

Розглянемо тепер прогресію ще більш загального виду – так звану степеневу прогресію [28]. Насамперед введемо поняття середнього степеневого.

Середнім степеневим степеня k чисел $a_1 > 0, a_2 > 0$ називають число

$$c = \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k}{2}} \quad (1.20)$$

При $k = -1, 0, 1, 2$ з формули середнього степеневого дістанемо, як окремі випадки, формули середнього гармонічного, середнього геометричного, середнього арифметичного і середнього квадратичного відповідно. У всіх випадках, крім другого, відповідні середні знаходимо, безпосередньо підставляючи значення: $-1, 1, 2$ у формулу (1.20); у другому випадку безпосередня підстановка значення $k = 0$ у цю формулу призводить до невизначеності виду 1^∞ . Знайдемо границю:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{a_1^k + a_2^k}{2}} = \sqrt{a_1 a_2}$$

Отже, середнє степеневе $k = 0$ переходить у середнє геометричне. Відомі нам середні: гармонічне H , арифметичне A , геометричне G і квадратичне Q пов'язані залежностями

$$H \leq G \leq A \leq Q$$

Можна довести, що середнє кубічне двох додатних чисел a і b , яке ми дістанемо із загальної формули середнього степеневого при $k = 3$, не менше середнього квадратичного тих самих чисел, тобто

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3}{2}} \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Взагалі ланцюжок нерівностей $H \leq G \leq A \leq Q$ можна продовжувати в обидва боки без кінця. Щоб переконатися у цьому, доведемо, що для додатних a і b та цілого $m > 0$ справджується нерівність

$$\sqrt[m]{\frac{a^m + b^m}{2}} \leq \sqrt[m+1]{\frac{a^{m+1} + b^{m+1}}{2}}$$

Позначимо дріб $\frac{a}{b}$ через t . З очевидної нерівності $(t^{\frac{k+1}{2}} - t^{\frac{k-1}{2}})^2 \geq 0$ після виконання перетворень дістанемо:

$$(1 + t^k)^2 \leq (1 + t^{k-1})(1 + t^{k+1})$$

Надаючи числу k значень $1, 2, 3, \dots, m$ дістанемо m нерівностей

$$(1 + t)^2 \leq 2(1 + t^2),$$

$$(1 + t^2)^2 \leq (1 + t)(1 + t^3),$$

$$(1 + t^3)^2 \leq (1 + t^2)(1 + t^4)$$

.....

$$(1 + t^m)^2 \leq (1 + t^{m-1})(1 + t^{m+1}).$$

Залишивши першу з нерівностей без зміни, піднесемо обидві частини другої до квадрата, третьої – до куба і так далі; обидві частини останньої нерівності піднесемо до m -го степеня. Потім, перемноживши відповідні частини здобутих таким чином нерівностей, дістанемо нерівність

$$(1 + t^m)^{m+1} \leq 2(1 + t^{m+1})^m$$

Повертаючись до значення $t = \frac{a}{b}$ та виконуючи потрібні викладки, приходимо до співвідношення

$$\sqrt[m]{\frac{a^m + b^m}{2}} \leq \sqrt[m+1]{\frac{a^{m+1} + b^{m+1}}{2}}$$

Доведену нерівність можна поширити й на від'ємні показники m :

$$\sqrt[-m]{\frac{a^{-m} + b^{-m}}{2}} \leq \sqrt{-(m+1)} \sqrt{\frac{a^{-(m+1)} + b^{-(m+1)}}{2}}$$

Теорема 1.10. *Логарифмічна прогресія збіжна тоді і тільки тоді, коли степінь k менший за одиницю або $k = 1$, причому, коли $|k| < 1$, то границя*

логарифмічної послідовності дорівнює одиниці, а при $k = 1$ послідовність збігається до першого члена прогресії.

Доведення. Нехай $a, a^k, a^{k^2}, a^{k^3}, \dots$ (де $a \neq 1$ і $a > 0$) довільна логарифмічна прогресія.

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1^{k^{n-1}}$$

При $k = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1^{k^{n-1}} = a_1$$

Якщо $|k| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1^{k^{n-1}} = 1$$

■

Означення 1.16. Степеневою прогресією називають послідовність, в якій k -ий степінь кожного члена, починаючи з другого, дорівнює k -му степеню попереднього члена, що додається до того самого, сталого для даної послідовності числа.

У степеневій прогресії k -го степеня кожний член, починаючи з другого – середнє степеневе сусідніх членів прогресії:

$$a_n = \sqrt[k]{\frac{a_{n-1}^k + a_{n+1}^k}{2}} \quad (1.21)$$

Арифметична й геометрична прогресії належать до класу степеневих прогресій. Справді, в арифметичній і геометричній прогресіях перехід від кожного члена до наступного здійснюється за допомогою дій першого і відповідно, другого ступенів. У логарифмічній прогресії для такого переходу треба застосовувати дію третього ступеня.

Означення 1.17. Під сумою S нескінченної прогресії будемо розуміти границю (за умови, що вона існує), до якої прямує сума S_n перших n членів прогресії при необмеженому зростанні числа n . Тобто,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

З цього випливає, що із сумою членів нескінченної прогресії можна поводитись як з числом тільки тоді, коли існує скінченна границя суми її членів. За такої умови прогресію називають збіжною, в іншому випадку – розбіжна. Нескінченна геометрична прогресія збігається тоді і тільки тоді, коли $|q| < 1$. Окремий випадок (при $a = 1, d = 1$) нескінченної гармонічної прогресії становить послідовність $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \dots$. Нескінченну суму членів цієї послідовності

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \dots$$

називають гармонічним рядом. Гармонічний ряд не має скінченної границі.

Справді, сума перших членів ряду

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n} \right) + \dots$$

Деяке число, а сума членів частини ряду $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ більша за $\frac{1}{2n}$. $n = \frac{1}{2}$; так само сума членів частини ряду $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n}$ більша за $\frac{1}{4n} \cdot 2n = \frac{1}{2}$ і так далі. Отже, сума членів гармонічного ряду більша за суму

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots,$$

Тобто більша від будь-якого наперед заданого числа. Таким чином, гармонічний ряд розбіжний.

Розглянемо тепер питання про знаходження суми членів нескінченної логарифмічної прогресії. Якщо $a > 1$, то показник загального члена k^{n-1} необмежено зростає і не прямує до жодної границі. Якщо $0 < k < 1$, то із зростанням числа n показник k^{n-1} загального члена логарифмічної прогресії $a, a^k, a^{k^2}, \dots, a^{k^{n-1}}$ спадає, прямує при необмеженому зростанні числа членів до

нуля; загальний член $a^{k^{n-1}}$ очевидно прямує до будь-якої границі. Але добуток членів такої прогресії при необмеженому зростанні числа членів має границю. Справді

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} a^k a^{k^2} a^{k^3} \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1+k+k^2+k^3+\dots} = a^{\lim_{n \rightarrow \infty} (1+k+k^2+k^3+\dots)} = \frac{1}{a^{1-k}}$$

В логарифмічній прогресії $a < 1$ і $k > 1$, то при необмеженому зростанні числа n загальний член прямує до нуля, і сума членів прогресії має границю. Це випливає з того, що множина членів такої прогресії – власна підмножина множини членів нескінченної спадної геометричної з тим самим першим членом і знаменником, який йому дорівнює.

1.4. Рекурентні співвідношення. Числа Фібоначчі

Означення 1.18. Числова послідовність з початковими членами $U_1 = 1$, $U_2 = 1$, кожен член якої, починаючи з третього, задовольняє співвідношення [30]

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (1.22)$$

називають послідовністю Фібоначчі [21].

Якщо в рівності (1.22) вважати початковими значеннями $U_0 = 0, U_1 = 1$, то отримаємо наступну «узагальнену» послідовність Фібоначчі φ

$$(U_n) = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 \dots\}. \quad (1.23.)$$

Поширивши (1.8) на цілі від'ємні значення n , можна продовжити послідовність чисел (U_n) для цілих від'ємних чисел:

$$(U_n) = \{\dots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\} \quad (1.24)$$

У цьому випадку $U_{-n} = U_{-n+2} + U_{-n+1}$, де n – довільне натуральне число.

Означення 1.19. Рекурентним співвідношенням називається рівність виду:

$$a_{n+1} = F(a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-k+1}),$$

де F – деяка функція від k аргументів, яка дозволяє обчислювати наступні члени послідовності через значення k попередніх членів. Якщо вказати перші

кчлени послідовності $a_1, a_2, \dots, a_k$, то рекурентне співвідношення однозначно визначає послідовність (a_m) [21].

Знаходження явних формул для обчислення загального члена послідовностей, що задовольняють рекурентне співвідношення, називають розв'язанням рекурентного співвідношення.

Рекурентне співвідношення виду

$$a_{n+1} = Aa_n + Ba_{n-1}, n \geq 2. \quad (1.25)$$

називають лінійним рекурентним співвідношенням другого порядку.

Теорема 1.11. Нехай задано співвідношення (1.25) та вказано початкові умови a_1 і a_2 . Тоді, якщо α і β – різні корені рівняння

$$x^2 - Ax - B = 0, \quad (1.26)$$

то будь-який розв'язок рекурентного співвідношення (1.25) має вигляд

$$a_{n+1} = C_1 \alpha^{n+1} + C_2 \beta^{n+1}, n \geq 2, \quad (1.27)$$

якщо ж рівняння (1.26) має два однакові корені, то довільний розв'язок рекурентного співвідношення (1.25) має вигляд

$$a_{n+1} = \alpha^{n+1}(C_1 + nC_2), n \geq 2, \quad (1.28)$$

де C_1, C_2 - деякі коефіцієнти, що залежать від початкових умов і коренів рівняння (1.26) [21].

Доведення [21]. Розглянемо спочатку випадок, коли рівняння (1.26) має різні корені. Тоді за теоремою Вієта $\alpha + \beta = A$ і $\alpha \cdot \beta = -B$. Використовуючи ці рівності, співвідношення (1.25) можемо переписати у вигляді

$$a_{n+1} = (\alpha + \beta)a_n + \alpha \cdot \beta \cdot a_{n-1}, \quad (1.29)$$

перенесемо αa_n в ліву частину рівності

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta(a_n - \alpha a_{n-1}), n \geq 2.$$

Остання рівність означає, що послідовність $a_{n+1} - \alpha a_n$ є геометричною прогресією зі знаменником β . Використовуючи формулу $(n+1)$ – го члена геометричної прогресії можемо записати

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1), n \geq 2.$$

Перенесемо в ліву частину рівності (1.29) доданок βa_n . Тоді

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha(a_n - \beta a_{n-1}), n \geq 2.$$

і послідовність $a_{n+1} - \beta a_n$ також є геометричною прогресією, звідки

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \beta a_1), n \geq 2.$$

Отже, маємо рівності:

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \beta^{n-1}(a_2 - \alpha a_1), n \geq 2$$

$$a_{n+1} - \beta a_n = \alpha(a_n - \beta a_{n-1}), n \geq 2.$$

Виключивши з них a_n і виконавши перетворення, одержимо:

$$a_{n+1} = \alpha^n \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha - \beta} + \beta^n \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta - \alpha}.$$

Покладемо $C_1 = \frac{a_2 - \beta a_1}{\alpha(\alpha - \beta)}$ і $C_2 = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\beta(\beta - \alpha)}$. Тоді останню рівність можна подати у вигляді:

$$a_{n+1} - \alpha a_n = \alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1), n \geq 2$$

або

$$a_{n+1} = \alpha a_n + \alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1), n \geq 2.$$

Оскільки отримане співвідношення справедливе для будь-якого n , то для a_n дістанемо:

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \alpha^{n-2}(a_2 - \alpha a_1), n \geq 2.$$

Замінімо в попередній рівності a_n на отриманий вираз

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha(\alpha a_{n-1} + \alpha^{n-2}(a_2 - \alpha a_1)) + \alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1) = \\ &= \alpha^2 a_{n-1} + 2\alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1), n \geq 2. \end{aligned}$$

Тепер виразимо a_{n-1} через a_{n-2} і підставимо в формулу і т.д. Повторюючи аналогічну операцію декілька разів, одержимо

$$a_{n+1} = \alpha^n a_1 + n\alpha^{n-1}(a_2 - \alpha a_1), n \geq 2.$$

Позначивши тепер $C_1 = \frac{a_1}{\alpha}$ і $C_2 = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2}$, отримаємо рівність

$$a_{n+1} = \alpha^{n+1}(C_1 + nC_2), n \geq 2. \quad \blacksquare$$

Застосуємо теорему 1.11 для розв'язування рекурентного співвідношення (1.22) та знаходження загального члена послідовності Фібоначчі, що визначається рекурентним співвідношенням

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}, \quad n \geq 2$$

з початковими умовами $U_0 = 0$ і $U_1 = 1$.

Запишемо відповідне квадратне рівняння (його називають *характеристичним*):

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Це рівняння має два корені $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ і $\beta = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$, тому розв'язок даного співвідношення будемо шукати у вигляді

$$U_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Знайдемо значення констант C_1 та C_2 , виходячи з початкових умов. При $n = 0$ і $n = 1$ маємо рівності:

$$0 = U_0 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^0 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^0 = C_1 + C_2,$$

$$1 = U_1 = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1.$$

Розв'язуючи отриману систему, знаходимо $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ і $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Отже, має місце наступне твердження.

Теорема 1.12. *Загальний член послідовності Фібоначчі можна обчислити за формулою*

$$U_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{де } n = 0, 1, \dots \quad (1.30)$$

Формула (1.30) дає можливість обчислювати числа Фібоначчі і виражає в явному вигляді значення U_n як функцію від n . Цю формулу називають *формулою*

Біне. Уперше вона була опублікована Д. Бернуллі в 1728 році, проте про неї забули, і її у 1843 році перевідкрив Ж. Біне (1786 – 1856).

Перевіримо правильність обчислень за формулою (1.30), поклавши у ній $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$. Будемо мати:

$$U_0 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0;$$

$$U_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1;$$

$$U_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = 1;$$

$$U_3 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}-1+3\sqrt{5}-15+5\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{16\sqrt{5}}{8}}{\sqrt{5}} = 2.$$

Числа $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ і $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ є коренями характеристичного рівняння

$x^2 - x - 1 = 0$. Вони відіграють роль універсальних констант, а їх модулі

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ і $\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ називають числами золотого перерізу, золотими пропорціями або «золотими» числами.

При цьому $\varphi \cdot \Phi = 1$ і $\Phi - \varphi = 1$. Це єдина пара дійсних чисел, що мають таку властивість.

З формули (1.30) випливає ще одне зображення n -го числа Фібоначчі через «золоті константи», яке є модифікацією формули Біне (1.30):

$$U_n = \frac{\Phi^n - (-\varphi)^n}{\Phi + \varphi} = \frac{\Phi^n - (-\varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

$$U_n = \frac{\Phi^{T+(-1)^{T+1}} \varphi^n}{\sqrt{5}} \quad (1.31)$$

При цьому U_n є найближчим до $\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$ цілим числом, тобто $U_n = \left[\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} \right] + \theta_n$, де $|\theta_n| < \frac{1}{2}$, $n \in N$.

Зазначимо також, що формула Біне може бути аналітично продовжена наступним чином: $U_z = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^z - \frac{\cos \pi z}{\Phi^z} \right)$, де Φ – число золотого перерізу [21].

Висновок до Розділу 1

У цьому розділі ми описали такі поняття, як: поняття числової послідовності, збіжність послідовностей; арифметична та геометрична прогресії, їх основні властивості; гармонічна, квадратична, логарифмічна та степенева прогресії; рекурентні співвідношення, Числа Фібоначчі. Кожний пункт має теоретичний матеріал з доведенням, також присутні пояснювальні приклади. Розглянуті основні властивості арифметичної та геометричної прогресії з їх доведенням.

Матеріал розділу може використовуватися вчителем для пояснення на уроці.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

2.1 Аналіз змістової лінії «Числові послідовності» у програмах шкільного курсу математики

У шкільному курсі математики розглядаються переважно функції, задані на множині всіх дійсних чисел або на деяких інтервалах цієї множини. Однак, нерідко доводиться мати справу й з такими функціями, що задані на множині натуральних чисел, або на множині перших натуральних чисел. Такі функції називають числовими послідовностями.

У навчальній програмі [28] з математики для учнів 5–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів з темою «Числові послідовності» учні ознайомлюються у дев'ятому класі на уроках алгебри, на вивчення якої відводиться 10 годин. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів є: наводить приклади числової послідовності, арифметичної та геометричної прогресій; формулює означення і властивості цих прогресій; записує і пояснює формули n -го члена, суми перших n членів цих прогресій; властивості арифметичної та геометричної прогресій; розв'язує вправи, що передбачають обчислення членів прогресій; задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними; обчислення сум перших n членів арифметичної й геометричної прогресій; використання формул загальних членів і сум прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій. Отже, арифметична та геометрична прогресії, їх властивості; формули n -го члена арифметичної та геометричної прогресій; формули суми перших n членів арифметичної та геометричної прогресій є основним змістом навчального матеріалу з теми «Числові послідовності».

У навчальній програмі [26] для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів зазначається, що у процесі вивчення теми «Послідовності» важливо сформулювати правильне уявлення про послідовність як функцію натурального аргументу, а також виробити вміння застосовувати метод математичної індукції. Уявлення про границю послідовності і обчислення суми нескінченної геометричної прогресії є пропедевтичною базою для подальшого вивчення курсу математичного аналізу. На вивчення теми «Послідовності» відводиться 32 годин і учні ознайомлюються з нею у дев'ятому класі. Зміст навчального матеріалу включає: числові послідовності; способи задання числових послідовностей; формула n -го члена; рекурентний спосіб задання послідовностей; арифметична і геометрична прогресії та їх властивості; знаходження суми n перших членів деяких послідовностей; формули n -го члена і суми n перших членів прогресій; нескінченна геометрична прогресія; уявлення про границю послідовності; метод математичної індукції та його застосування. Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів передбачає, що учень пояснює: способи задання числових послідовностей, метод математичної індукції, поняття суми нескінченної геометричної прогресії; формулює означення і властивості арифметичної та геометричної прогресій; доводить властивості цих прогресій, формули n -го члена і суми n перших членів прогресій; розв'язує вправи, що передбачають знаходження членів прогресії, задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними, обчислення сум перших n членів прогресій, запис періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного, використання формул n -го члена і суми n перших членів прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій, використання методу математичної індукції.

Навчальна програма [27] призначена для організації навчання математики на поглибленому рівні. Тема «Числові послідовності» вивчається в десятому класі протягом 12 годин на уроках алгебри і початків аналізу. До змісту навчального

матеріалу належать: важливі класи числових послідовностей (монотонні, обмежені тощо); границя числової послідовності; геометрична інтерпретація границі числової послідовності; основні теореми про границі числових послідовностей; число e . До навчальних досягнень учнів відносять: виділяє основні класи послідовностей; формулює означення границі числової послідовності, основні теореми про границю числової послідовності; застосовує основні теореми про границі числових послідовностей.

У навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівень стандарту і профільний рівень вивчення теми «Числові послідовності» не передбачено.

2.2. Особливості введення основних понять з теми «Числові послідовності» у шкільних підручниках

Вивчення математики відіграє важливу роль у шкільному процесі. Тому Міністерство освіти та науки України дає змогу черпати знання з різних джерел. Основним з цих джерел є підручник[2,9,15,21,22,]. Далі на прикладі декількох підручників ознайомимося з вивченням поняття «Числові послідовності». Перелік підручників з якими ми будемо ознайомлюватися: Алгебра підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. Г.П.Бевз, В.Г. Бевз – 2017року[2]; Алгебра підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. О.С Істер – 2017року[9]; Алгебра підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір – 2017 року[21]. Зробимо порівняння за допомогою таблиці.

Підручник	А.Г. Мерзляк В.Б. Полонський М.С. Якір 2017 рік	О.С. Істер 2017 рік	Г.П. Бевз В.Г. Бевз 2017 рік
Означення послідовності	Об'єкти, які пронумеровано послідовно натуральними числами 1, 2, 3, ..., n , ..., утворюють	Поняття послідовності вводиться за допомогою приклада: Запишемо в	Послідовність — це множина будь-яких об'єктів, розташованих у певному порядку.

	послідовності.	порядку зростання натуральні парні числа: 2, 4, 6, ... Маємо послідовність парних натуральних чисел.	
Не чітке означення у другому підручнику.			
Означення числової послідовності	Якщо членами послідовності є числа, то таку послідовність називають числовою.	Послідовності є числовими, якщо вони складаються з чисел.	Якщо членами послідовності є числа, її називають числовою послідовністю.
Мають однаковий зміст.			
Формула n -го члена послідовності	Рівність $x_n = 2^n$, де змінна n набуває всіх натуральних значень, задає послідовність (x_n) натуральних степенів числа 2: 2, 4, 8, 16, 32, У таких випадках говорять, що послідовність задано за допомогою формули n -го члена послідовності.	Оскільки в послідовності парних натуральних чисел на n -му місці стоїть число $2n$, то можна записати, що $a_n = 2n$. Отримали формулу n -го члена послідовності.	Оскільки кожний член послідовності парних натуральних чисел удвоє більший від свого порядкового номера, то її n -й член дорівнює $2n$, тобто $a_n = 2n$. Це формула n -го члена послідовності.
Є чітке означення формули.			
Визначення арифметичної прогресії	Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число.	Послідовності, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, доданому до одного і того самого числа називають арифметичною прогресією.	Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число.
Чітко виражене визначення арифметичної прогресії.			
Різниця	Число, яке	Різницю	Нехай дано послідовність,

арифметичної прогресії	дорівнює різниці наступного й попереднього членів послідовності, називають різницею арифметичної прогресії та позначають буквою d .	арифметичної прогресії можна знайти, якщо від будь-якого члена прогресії, починаючи з другого, відняти попередній, називають різницею арифметичної прогресії та позначають буквою d .	перший член якої 5, а кожний інший член на 3 більший від попереднього: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29,... Це арифметична прогресія з першим членом 5 і різницею 3. Це стало для даної послідовності число d називають різницею арифметичної прогресії.
У третьому підручнику не чітке визначення.			
Формула n -го члена арифметичної послідовності	$a_2 = a_1 + d;$ $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2;$ $a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + d \cdot 3;$ $a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + d \cdot 4.$ Ці приклади допомагають побачити таку закономірність: щоб знайти деякий член арифметичної прогресії, можна до першого члена додати добуток різниці d і числа, яке на 1 менше від номера шуканого члена. Звідси, наприклад, $a_6 = a_1 + d \cdot 5,$ $a_7 = a_1 + d \cdot 6,$ і взагалі $a_n = a_1 + d(n - 1)$ Записану рівність називають формулою n -го члена арифметичної прогресії.	$a_2 = a_1 + d;$ $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$ $a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + 3d;$ $a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + 4d$ Помічасмо, що в кожній з отриманих формул коефіцієнт біля різниці d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, для якого записано цю формулу. Справді, адже щоб знайти a_n , маючи a_1 і d , треба $n - 1$ разів додати до a_1 число d , тобто до a_1 додати $(n - 1)d$. Маємо: $a_n = a_1 + d(n - 1)$ Отримали формулу n -го члена арифметичної прогресії.	$a_2 = a_1 + d;$ $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$ $a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + 3d;$ $a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + 4d$ Зверніть увагу: коефіцієнт при d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії. Так само знаходимо $a_6 = a_1 + 5d,$ $a_7 = a_1 + 6d$ і взагалі: $a_n = a_1 + (n - 1)d$ Це формула n -го члена арифметичної прогресії.

Формула чітка та доведена у всіх підручниках.			
Властивість	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх з ним членів.	Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, тобто, $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$	Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого, дорівнює півсумі двох сусідніх з ним членів: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$
Присутнє чітке означення з формулою. Інформація трактується по-різному.			
Формула суми n перших членів арифметичної прогресії	Запишемо суму S_n двома способами. Спочатку запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_1, а кожний наступний доданок отримано з попереднього додаванням різниці d. Потім запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_n, а кожний наступний доданок отримано з попереднього відніманням різниці d. Маємо: $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d),$ $S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$ Додавши ці рівності, отримаємо:	Знайдемо формулу для обчислення суми. Запишемо суму двічі, розмістивши в першому випадку доданки в порядку зростання їх номерів, а у другому – у порядку спадання: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n;$ $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1.$ Тепер ці рівності додамо почленно, матимемо: $2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$ За властивістю $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_{n-1} + a_2$, тобто кожна сума в дужках дорівнює $a_1 + a_n$, оскільки	Сума n-перших членів скінченної арифметичної прогресії дорівнює півсумі крайніх її членів, помноженій на число членів: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ Нехай S_n — сума n-перших членів арифметичної прогресії $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Якщо $a_1 + a_n = m$, то $a_2 + a_{n-1} = m$, $a_3 + a_{n-2} = m$ і т. д. Враховуючи це, додамо почленно дві рівності: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n;$ $+ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 =$ $2S_n = m + m + m + \dots + m + m + m$ $2S_n = mn$ $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n, \text{ звідси}$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ За цією формулою знаходять суму перших n членів будь-якої арифметичної прогресії.

	$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$. Вираз, записаний у правій частині останньої рівності, є сумою n доданків, кожний з яких дорівнює $a_1 + a_n$. Тоді $2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$, тобто $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Отриману рівність називають формулою суми n перших членів арифметичної прогресії.	$1 + n - 2 + n - 1 = 3 + n - 2 = \dots = n - 1 + 2$. Тоді у правій частині маємо n доданків, кожний з яких дорівнює $a_1 + a_n$. Отже, $2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$. Поділивши обидві частини цієї рівності на 2, отримаємо формулу суми n перших членів арифметичної прогресії: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.	
Формули мають доведення.			
Визначення геометричної прогресії	Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.	Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожне з яких, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те саме число.	Геометричною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число.
Чітко виражене означення.			
Означення знаменника геометричної прогресії	Число, що дорівнює відношенню наступного до попереднього членів послідовності, називають знаменником геометричної	Знаменник геометричної прогресії можна знайти, якщо будь-який член прогресії, починаючи з другого, поділити на попередній. Це	Геометричною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме число. Це стало для даної послідовності число q називають знаменником геометричної прогресії.

	прогресії та позначають буквою q .	число називають знаменником геометричної прогресії та позначають буквою q .	
Чітко виражене означення у двох підручниках у третьому воно впливає з означення.			
Формула n -го члена геометричної прогресії	$b_2 = b_1 \cdot q$ $b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q)q = b_1 q^2$ $b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2)q = b_1 q^3$ $b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3)q = b_1 q^4$ Ці приклади допомагають помітити таку закономірність: щоб знайти деякий член геометричної прогресії, можна перший член помножити на степінь з основою q і показником, який на 1 менший від номера шуканого члена. Звідси, наприклад, $b_6 = b_1 q^5$, $b_7 = b_1 q^6$, і взагалі $b_n = b_1 q^{n-1}$. Записану рівність називають формулою n -го члена геометричної прогресії.	$b_2 = b_1 \cdot q$ $b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q)q = b_1 q^2$ $b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2)q = b_1 q^3$ $b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3)q = b_1 q^4$ Помічаємо, що в кожній з отриманих формул показник степеня q на 1 менший від порядкового номера члена прогресії, для якого записано цю формулу. Справді, адже щоб знайти b_n , маючи b_1 і q , треба $n-1$ разів помножити b_1 на q , тобто b_1 помножити на q^{n-1} . Маємо $b_n = b_1 q^{n-1}$. Отримали формулу n -го члена геометричної прогресії.	Геометрична прогресія з першим членом b_1 і знаменником q має такі перші члени: b_1 , $b_1 q$, $b_1 q^2$, $b_1 q^3$, $b_1 q^4$, Її другий член $b_2 = b_1 q$, третій — $b_3 = b_1 q^2$, а n -й член — $b_n = b_1 q^{n-1}$. Це формула n -го члена геометричної прогресії.
Присутнє чітке визначення та доведення.			
Властивість геометричної прогресії	Властивість членів геометричної прогресії (b_n). Маємо:	Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з	Квадрат кожного члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх його членів:

	$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}$, звідси $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$ $\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3}$, звідси $b_3^2 = b_2 \cdot b_4$ Узагалі, для будь-якого натурального n , більшого за 1, можна записати: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ Звідси $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює добутку двох сусідніх із ним членів.	другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів, тобто $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ Скористаємося формулою n -го члена геометричної прогресії. Тоді $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_1 q^{(n-1)-1} \cdot b_1 q^{(n+1)-1}$ $= b_1^2 q^{n-2+n} = b_1^2 q^{2n-2} = (b_1 q^{n-1})^2 = b_n^2$.	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ За означенням, $b_{n-1} = \frac{b_n}{q}$ а, $b_{n+1} = b_n \cdot q$ Отже, $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n \cdot q \cdot \frac{b_n}{q} = b_n^2$.
Присутнє чітке визначення та доведення.			
Метод викладення	Практичний, спочатку йде приклад потім правило, або навпаки для більш кращого розуміння матеріалу.	Практичний, спочатку йде приклад потім правило, або навпаки для більш кращого розуміння матеріалу.	Практичний, спочатку йде приклад потім правило, або навпаки для більш кращого розуміння матеріалу.
Приклади розв'язування задач	Приклади розв'язування задач йдуть одразу після теоретичної інформації.	Розглянуто різні типи прикладів які чергуються з теоретичними відомостями.	Приклади йдуть після теоретичних відомостей та окремою темою для вирішення разом з вчителем.
Система задач	Задачі поділені на різні рівні складності, також є вправи для повторення та усного опрацювання.	Задачі поділені на різні рівні складності, також є вправи для повторення та усного опрацювання і	Задачі поділені на різні рівні складності.

		підготовки до нового матеріалу.	
Оформлення інформацій	Визначення виділені жирним шрифтом та іншим кольором. Формули виділені окремо та у рамочці. Є чіткий поділ прикладів та основної інформації.	Визначення виділені окремим кольором та мають знак оклику. Чіткий поділ між кожним визначенням та прикладом. Різний матеріал має певний колір.	Визначення виділені жирним шрифтом. Теорема та формули виділені окремо шрифтом та кольором.
Примітки	Після параграфу йдуть питання для самоперевірки. Також є вправи на повторення.	Після параграфу є історичні цікавинки по матеріалу. Присутні вправи для повторення та підготовки до нового матеріалу. Наявні вправи для дітей які бажають поглиблення.	Після прикладів є перелік досягнень, які учень отримав за вивчення матеріалу та питання на засвоєння матеріалу. Також присутні тести для декількох варіантів.

Тема “Числові послідовності” у підручнику А.Г. Мерзляк та ін. розпочинається з визначення та наведення прикладів для розуміння поняття числова послідовності. Має чітке доведення та приклади. Після опрацювання цього розділу та перевірки учнів на засвоєння, нас зустрічає тема “Числа Фібоначчі”. Має невеликий історичний зміст з означенням та поняттям “Числа Фібоначчі”, також присутні приклади та матеріал з доведенням. Після цієї теми йдуть: означення та формули з теми “Арифметична прогресія” та “Геометрична прогресія”. Весь опрацьований матеріал дає змогу легко освоїти ці теми учню. Бо має достатню кількість прикладів розв’язання завдань, питання для перевірки засвоєння матеріалу та вправи для повторення матеріалу, відокремлення важливої

інформації кольором або шрифтом. Також присутні рівні складності, які поступово зростають для більшого засвоєння.

У підручнику О.С. Істер інформація для учнів подається аналогічно першому підручнику. Визначення та правила мають дедуктивний характер, бо йдуть після їх доведення, що допомагає учню більш докладніше засвоїти матеріал. Між прикладами та вправами є історичні цікавинки з матеріалу, що дає змогу учню відпочити та пізнати тему з початку її заснування. Матеріал рівномірно поділений за рівнями складності, присутні приклади для допитливих учнів. Для більш легшого сприйняття учнями, всі означення та формули виділені окремо та певним кольором, що дає змогу сфокусуватися на певній інформації.

Підручник Г.П. Бевз має таку саму програму як і інші. Матеріал чітко сфокусований на вивченні теми. Має достатньо виділену інформацію для кращого сприйняття учня. Приклади наведені після означення або формули. Присутнє підведення матеріалу у вигляді “Скарбнички досягнень” для заключення пройденої теми.

Про аналізувавши зміст навчального матеріалу у вище перелічених підручниках за темою “Числові послідовності”, можемо зауважити, що всі вони відповідають плану вивчення. Матеріал подається по-різному, присутнє різне подання вправ на засвоєння теми. Все це показується за допомогою різних рівнів складностей, наявністю історичних інформацій та пояснення прикладами. Що дає змогу вчителю обрати більш підходящий варіант для навчання учнів у шкільній програмі. Кожен підручник ілюструє свій метод вивчення теми та підхід до навчання, але матеріал викладений чітко та відповідає плану.

2.3. Методичні вказівки до вивчення теми «Числові послідовності»

Тему “Числові послідовності” учні починають вивчати у 9 класі. Міністерство освіти України пропонує достатньо велику кількість літератури для вчителя, щоб оцінити її зміст та обрати більш доцільний підручник[36]. При вивченні числової послідовності очікується від учнів такий результат:

- Учні можуть наводити приклади об’єктів з повсякденного життя, з якими зручно мати справу, якщо їх попередньо пронумерувати;
- Наводити приклади числових послідовностей;
- Володіти різними способами задання числової послідовності;

Як правило послідовність визначають таким означенням:

Означення 2.1. Числова послідовність називається функція, яка задана на множенні всіх натуральних чисел або на множенні n натуральних чисел.

Числова послідовність позначається: (a_n) ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; ... a_n ;

Кожне число a_n — n -й член послідовності, n - номер члена.

Прикладом послідовності можуть бути довільні числа: цілі, дробові, додатні та від’ємні, раціональні та ірраціональні, але вони поділяться на: парні, непарні, натуральні та обернено натуральні.

Приклад 2.1.:

1, 3, 5, 7, 9, 11, - послідовності непарних чисел.

2, 4, 6, 8, 10, 12, - послідовності парних чисел.

2, 3, 5, 8, 11, 13, - послідовність натуральних чисел.

1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ — послідовності чисел, обернених до натуральних.

Слід зауважити, що послідовності також бувають скінченні та нескінченні, зростаючі та спадні.

Означення 2.2. Якщо кількість членів n послідовності (a_n) скінченна, то така послідовність називається скінченною. Обернено цьому означенню можна зрозуміти, що таке нескінченна послідовність.

Приклад 2.2.:

- 1) Послідовність (a_n) натуральних чисел нескінченна.
- 2) Послідовності (a_n) коренів рівняння $(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$ скінченна.

Означення 2.3. Якщо кожен наступний член послідовності, починаючи з другого, більший за попередній, то послідовність є зростаючою.

Означення 2.4. Якщо кожний член послідовності, починаючи з другого, менший від попереднього, то послідовність є спадною.

Приклад 2.3.:

(a_n) : 1, 2, 3... - послідовність натуральних чисел є зростаючою.

(a_n) : -1, -2, -3... - послідовність цілих від'ємних чисел є спадною.

Шкільна література ознайомлює нас з поняттям числової послідовності та дає можливість навчити декількома способами задавати дану послідовність [12]. Розберемо способи задання числової послідовності на прикладах:

- 1) Описом знаходження її членів:

Числова послідовність дільників числа 12, записаних у порядку зростання:

(a_n) : $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=6$, $a_6=12$.

- 2) Переліком її членів:

(a_n) : 22; 3; 34; 17, тоді $a_1=22$, $a_2=3$, $a_3=34$, $a_4=17$.

- 3) Таблицею:

n	1	2	3	4	5
a_n	-4	2	-3	1	-5

Тоді $a_1 = -4$, $a_2 = 2$, $a_3 = -3$, $a_4 = 1$, $a_5 = -5$.

- 4) Формулою n -го члена :

$a_n = n^2 - 1$, тоді $a_1 = 1^2 - 1 = 0$; $a_2 = 2^2 - 1 = 3$; $a_3 = 3^2 - 1 = 8$.

- 5) Рекурентною формулою :

$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$, якщо $a_1 = 1$; $a_2 = 2$,

тоді $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = a_1 \cdot a_2 = 2$; $a_4 = a_2 \cdot a_3 = 2 \cdot 2 = 4$; $a_5 = a_3 \cdot a_4 = 4 \cdot 2 = 8$.

Виходячи зі способів задання числової послідовності можемо ознайомитися з формулою n -го члена.

Рівність $x_n = 2^n$, де змінна n набуває всіх натуральних значень, задає послідовність (x_n) натуральних степенів числа 2: 2, 4, 8, 16, 32, У таких випадках говорять, що послідовність задано за допомогою формули n -го члена послідовності.

Ознайомившись з поняттям числової послідовності як з початковим матеріалом слід звернути увагу на поняття арифметичної та геометричної послідовності. Зазвичай ця тема проходить після числової послідовності, що дає змогу зрозуміти більш краще матеріал.

Під час проходження матеріалу учень отримує певні навички, а саме:

- Розпізнання арифметичної та геометричної прогресії з поміж інших числових послідовностей;
- Розуміння принципу конструювання арифметичної та геометричної прогресії;
- Наведення прикладів арифметичної та геометричної прогресії;
- Застосування формули n -го члена арифметичної та геометричної прогресії, формули суми n членів арифметичної та геометричної прогресії для розв'язування задачі, зокрема задачі практичного змісту;
- Розв'язання сюжетних задач математичною моделлю яких є послідовності.

Для більш кращого сприйняття теми розпочнемо з визначення арифметичної прогресії.

Дано послідовність, перший член якої 5, а кожний інший член на 3 більший від попереднього: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29,.... Це арифметична прогресія з першим членом 5 і різницею 3.

Означення 2.5. Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число. Це стало для даної послідовності число d називають різницею арифметичної прогресії. Іншими словами, арифметична прогресія — $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n + d$.

Щоб одержати будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, треба до попереднього члена додати різницю d .

Перший член та різниця арифметичної прогресії можуть будь-якими числами, також прогресію поділяють на зростаючу та спадну. Залежно від різниці, якщо вона додатна то це зростаюча, а якщо навпаки то спадна.

Наведемо приклад з подальшим виведенням формули n -го члена арифметичної прогресії:

Якщо перший член і різниця арифметичної прогресії дорівнюють відповідно a_1 і d , то її перші члени становлять:

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, a_1+4d, \dots \text{ тобто } a_2=a_1+d, a_3=a_1+2d, a_4=a_1+3d$$

коефіцієнт при d на 1 менший від порядкового номера числової послідовності, отже отримусмо формулу n -го члена арифметичної прогресії:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Приклад 2.4.

В арифметичній прогресії $a_1=4$, $d=3$. Знайти a_{20}

$$a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 61.$$

Формула n -го члена арифметичної прогресії важлива для легшого вирішення завдань та знаходження невідомого члена.

Розглянемо скінченну арифметичну прогресію $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Суму членів цієї прогресії позначимо S_n . Маємо:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. (*)$$

Виведемо формулу для знаходження цієї суми. Спочатку розглянемо задачу, розв'язання якої підкаже, як вивести шукану формулу.

Розглянемо арифметичну прогресію 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100 і знайдемо суму її членів. Запишемо шукану суму двома способами та додамо отримані рівності:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

+

$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

=

$$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

$$\text{Маємо: } 2S_{100} = 101 \cdot 100; S_{100} = 5050.$$

Скористаємося описаним прийомом для знаходження суми (*). Запишемо суму S_n двома способами. Спочатку запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_1 , а кожний наступний доданок отримано з попереднього додаванням різниці d . Потім запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_n , а кожний наступний доданок отримано з попереднього відніманням різниці d .

Маємо:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d),$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-2)d) + (a_n - (n-1)d)$$

Додавши ці рівності, отримаємо:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$. Вираз, записаний у правій частині останньої рівності, є сумою n доданків, кожний з яких дорівнює $a_1 + a_n$.

Тоді:

$$2S_n = (a_1 + a_n) n, \text{ тобто,}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Отриману рівність називають формулою суми n перших членів арифметичної прогресії.

Приклад 2.5.

Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 6.

Дані числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої $a_1 = 102$, а різниця $d = 6$. Тоді $a_n = 102 + 6(n - 1) = 6n + 96$. Знайдемо кількість членів цієї прогресії. Оскільки $a_n < 1000$, то шукана кількість — це найбільший натуральний розв'язок нерівності $6n + 96 < 1000$. Маємо:

$$6n < 904;$$

$$n < 150\frac{2}{3}$$

Отже, $n = 150$. Тепер знайдемо шукану суму:

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82350.$$

Давайте перейдемо до вивчення поняття геометричної прогресії, як і в більшості підручників знайомство з темою починається з визначення.

Означення 2.6. Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Розглянувши послідовність 1, 3, 9, 27, 81, 243, ..., ми можемо помітити певну особливість, а саме : кожний наступний член послідовності отримано в результаті множення попереднього члена на одне й те саме число 3.

Означення 2.7. Число, що дорівнює відношенню наступного і попереднього членів послідовності, називають знаменником геометричної прогресії та позначають буквою q .

З вище вказаних означень ми можемо вивести формулу геометричної прогресії:

якщо (b_n) — геометрична прогресія зі знаменником q , то

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} \dots,$$

тобто для будь-якого натурального n виконується рівність

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q,$$

Звідси випливає формула:

$$b_1 = b, b_{n+1} = b_n q.$$

Приклад 2.6.

Якщо $b_1 = 2$ і $q = 2$, то отримаємо геометричну прогресію, яка є послідовністю натуральних степенів числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$$

Зауважимо, що геометрична прогресія зі знаменником, який дорівнює 1, є послідовністю, усі члени якої рівні. Так, послідовність $8, 8, 8, 8, \dots$ є геометричною прогресією, у якої $b_1 = 8, q = 1$. Разом із цим цю послідовність можна розглядати як арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 8, d = 0$. Узагалі, будь-яка послідовність, усі члени якої рівні між собою та відмінні від нуля, є одночасно і геометричною, і арифметичною прогресією. Послідовність $0, 0, 0, 0, \dots$, усі члени якої дорівнюють нулю, не може бути геометричною прогресією.

У підручниках старшої школи додаються нові поняття числової послідовності [3, 10, 23, 24]. А саме: границя числової послідовності, теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями, властивості збіжних послідовностей, Теорема Вейерштрасса. Розглянемо підручник А.Г. Мерзляк «Алгебра з поглибленим вивченням» [24]. Давайте коротко ознайомимося з ними.

Границя числової послідовності

Означення 2.8. Число a називають границею послідовності (a_n) , якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Теорема 2.1. Числова послідовність може мати тільки одну границю.

Теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями

Додаються поняття збіжності та розбіжності границі. Для полегшення знаходження границі існують теореми про границю суми, добутку й частки двох послідовностей.

Теорема (границя суми) 2.2. Якщо послідовність (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність $(a_n + b_n)$ також є збіжною, причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Теорема (границя добутку) 2.3. Якщо послідовність (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність $(a_n b_n)$ також є збіжною, причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Теорема (границя частки) 2.4. Якщо послідовність (a_n) і (b_n) є збіжними, причому $(b_n) \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, то послідовність $\frac{a_n}{b_n}$ також є збіжною і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Властивості збіжних послідовностей

Теорема 2.5. Збіжна послідовність є обмеженою.

Теорема 2.6. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $a > b$ ($a < b$), то починаючи з деякого номера n_0 , виконується нерівність $a_n > b$ ($a_n < b$)

Наслідок 2.1. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \neq 0$, то, починаючи з деякого номера n_0 , виконується нерівність $|a_n| > r$, де r — деяке додатне число.

Теорема 2.7. Якщо для всіх $n \in N$ виконується нерівність $a_n \geq b_n$, причому існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то $a \geq b$.

Теорема (про двох конвоїрів) 2.8. Якщо для всіх $n \in N$ виконується подвійна нерівність $a_n \leq c_n \leq b_n$, причому послідовності (a_n) і (b_n) збігаються до спільної границі, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, то послідовність c_n також є збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Теорема 2.9. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, де $a_n \geq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Теорема (границя кореня) 2.10. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, де $a_n \geq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

Теорема (Вейєрштрасса) 2.11. Кожна зростаюча й обмежена зверху (спадна й обмежена з низу) послідовність має границю.

2.4. Практичні напрацювання з теми дослідження

Конспект уроку №1 на тему “Арифметична прогресія. Формула n-го члена арифметичної прогресії”

Мета уроку:

Навчальна. Розширити уявлення учнів про числові послідовності, ввести поняття арифметичної прогресії. Сформувати поняття n-го члена арифметичної прогресії. Навчити учнів розв'язувати вирази на застосування властивостей членів арифметичної прогресії.

Розвивальна. Розвивати вміння виявляти закономірності, логічне мислення, пам'ять, та зосередженість.

Виховна. Виховувати інтерес до вивчення математики, наполегливість у досягненні мети, самостійність.

Тип уроку: засвоєння нового матеріалу, набування нових вмінь.

Тривалість уроку: 45 хвилин.

План уроку

- Вітання та перевірка присутніх
- Перевірка домашнього завдання
- Перевірка пройденого матеріалу на засвоєння
- Пояснення нового матеріалу

- Застосування знань та вмінь
- Підсумок уроку
- Задання домашнього завдання

Початок уроку

Вітання вчителя, перевірка присутніх учнів з подальшим відміченням у журналі.

Перевірка домашнього завдання

Перевірка домашнього завдання разом класом по типу “Робота над помилками”. Вчитель запитує у класу яке було домашнє завдання з подальшим його записом на дошці. Вчитель записує відповіді на завдання з поясненням, після чого клас звіряє свої відповіді з записами на дошці. Якщо учень має питання або невірну відповідь, то вчитель викликає будь-якого учня для пояснення відповіді, щоб клас зрозумів, або вчитель детально пояснює сам. Паралельно учні роблять роботу над помилками та виправляють у зошиті.

Перевірка пройденого матеріалу на засвоєння

Вчитель задає питання по пройденому матеріалу, учень повинен дати відповідь на питання. Невелика інтерактивна гра “Питання-відповідь”.

1. Натуральні числа 1, 2, 3, 4... утворюють? (Числову послідовність).
2. Яку послідовність називають числовою? (Членами якої є числа).
3. Які ви знаєте способи задання послідовності? (Описовий, рекурентний та формулою n -го члена).
4. Які бувають послідовності? (скінченні, нескінченні, спадні, зростаючі).

Пояснення нового матеріалу

Як ви вже зрозуміли з назви нашого уроку, сьогодні ми будемо вивчати “Арифметичну прогресію та її властивості”.

Давайте з вами розглянемо дві послідовності та спробуємо знайти щось спільне між ними:

1; 3; 6; 9;...(кожен член, починаючи з другого, отримуємо додавши до попереднього число 3)

4; 2; 0; -2; -4;...(кожен член, починаючи з другого, отримуємо додавши до попереднього число -2)

Можемо з вами помітити, що у послідовності кожен член починаючи з другого можна отримати додавши одне й те саме число. Таку послідовність називають *арифметична прогресія*. Давайте запишемо під диктування означення.

Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число.

Також запишемо означення різниці арифметичної прогресії, що допоможе нам в майбутньому.

Число, яке дорівнює різниці наступного й попереднього членів послідовності, називають **різницею** арифметичної прогресії та позначають буквою d .

Звідси ми можемо записати які бувають послідовності:

Якщо $d=0$, то така прогресія є сталою.

Якщо $d<0$, то така прогресія є спадною.

Якщо $d>0$, то така прогресія є зростаючою.

Записавши означення ми можемо вивести рекурентну формулу арифметичної прогресії:

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Давайте розберемо декілька прикладів для розуміння:

- Прогресія 2; 4; 6; 8; 10;... є зростаючою бо $d=2$
- Прогресія 12; 9; 6; 3; 0;... є спадною бо $d=-2$
- Прогресія 4; 4; 4; 4; 4;... є сталою бо $d=0$

Після чого вчитель задає питання на засвоєння матеріалу:

Яка послідовність називається арифметичною?

Які бувають арифметичні послідовності?

Від чого це залежить?

Давайте знайдемо з вами перших 5 членів арифметичної прогресії, якщо за умовою задач ми знаємо, що $a_1 = 3$, а $d = 2$.

$$a_2 = a_1 + d = 3 + 2 = 5;$$

$$a_3 = a_2 + d = 5 + 2 = 7;$$

$$a_4 = a_3 + d = 7 + 2 = 9;$$

$$a_5 = a_4 + d = 9 + 2 = 11.$$

Це було не складно, а давайте уявимо з вами що потрібно знайти a_{50} або навіть a_{100} , якщо ми почали б робити то витратили багато часу, тому для простішого знаходження існує формула n -го члену арифметичної прогресії. Давайте спробуємо її вивести. Ми вже з вами знаємо, що:

$$a_2 = a_1 + d$$

тоді далі,

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d;$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d.$$

Ми з вами бачимо певну закономірність: відповідний член прогресії отримують додаванням до першого члена a_1 різниці d , помножене на число менше на 1 від порядкового номеру шуканого. Отримуємо формулу, яку запишемо:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

Давайте використовуючи дану формулу розв'яжемо приклади.

Приклад 1

Вчитель викликає до дошки учня.

Знайти n -тий член арифметичної прогресії знаючи, що $a_1 = 5$, $d = 3$.

Розв'язання

$$a_5 = 5 + (5 - 1) * 3 = 5 + 12 = 17.$$

Відповідь: 17.

Приклад 2

Вчитель викликає іншого учня до дошки.

Знайдіть три наступні члени арифметичної прогресії 2,5; 2; 1,5;...

Розв'язання

$$a_1 = 2,5; a_2 = 2; a_3 = 1,5.$$

Знайдемо різницю: $d = a_2 - a_1 = 2 - 2,5 = -0,5$.

$$a_4 = 1,5 - 0,5 = 1;$$

$$a_5 = 1 - 0,5 = 0,5;$$

$$a_6 = 0,5 - 0,5 = 0.$$

Застосування знань та вмінь

Вирішення усних та письмових прикладів.

1. Знайдіть п'ятий член і різницю арифметичної прогресії:

1) $1; 3; 5; 7; \dots$;

2) $9; 15; 21; 27; \dots$;

3) $-8; -6; -4; -2; \dots$

2. Знайдіть перші три члени арифметичної прогресії (a_n) , де:

1) $a_1 = 3, d = 4$;

2) $a_1 = 0,6, d = 0,5$.

Давайте проведемо не велику гру та поділимося на 4 команди, учні будуть отримувати однакові завдання, яка команда вирішить швидше та правильніше та отримує бал:

- Знайти a_{25} , якщо відомо, що $a_1 = 5$ і $d = 3$;
- Знайти a_1 , якщо $a_{44} = 74$ і $d = 10$;
- Знайти четвертий член арифметичної прогресії, якщо $a_1 = -9$ і $d = 4$.

Після вирішення цих завдань, учні переходять до прикладів з підручника для вирішення завдань, по черзі виходячи до дошки.

Підсумок уроку

Маю надію, що ви сьогодні дізналися багато нового. Давайте з вами перевіримо засвоєння матеріалу, відповівши на питання:

- Що таке арифметична прогресія?
- Від чого залежить, що арифметична прогресія є спадною чи зростаючою?
- Як виглядає формула n -го члена арифметичної прогресії?

Домашнє завдання

Прочитати параграф 16, вивчити конспект. Вирішити вправи 16.2, 16.4, 16.6 (Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 272 с.), [21]

Усі домашні вправи подібні з тими, що ми вирішували на уроці. Перед тим, як почати вирішувати завдання згадайте всі формули та означення які ми з вами вивчали сьогодні на уроці. Ці знання допоможуть вам у вирішенні домашнього завдання. Дякую за урок, успіхів та натхнення!

Конспект уроку №2 на тему “Геометрична прогресія, її властивості”

Мета уроку:

Навчальна. Розширити уявлення учнів про числові послідовності, ввести поняття геометричної прогресії. Сформувати поняття n -го члена геометричної прогресії. Навчити учнів розв’язувати вправи на застосування властивостей членів геометричної прогресії.

Розвивальна. Розвивати вміння виявляти закономірності, логічне мислення, пам’ять та зосередженість.

Виховна. Виховувати інтерес до вивчення математики, наполегливість у досягненні мети, самостійність.

Тип уроку: Засвоєння нових знань та вмінь

Тривалість уроку: 45 хвилин

Хід уроку

- Вітання та перевірка присутніх
- Перевірка домашнього завдання
- Перевірка засвоєння знань минулих уроків
- Пояснення нового матеріалу
- Відпрацювання вмінь та навичок
- Підводимо підсумок
- Домашнє завдання

Вітання та перевірка присутніх

Вчитель вітається з класом та організовує його. Після чого йде перевірка присутніх з подальшою відміткою у журналі.

Перевірка домашнього завдання

Вчитель питає та записує на дошці номери заданих додому завдань. Після чого пише на дошці вирішення та правильні відповіді, щоб клас мав змогу перевірити правильність відповідей або виконання роботи над помилками. Якщо учню щось не зрозуміло то вчитель пояснює або викликає іншого учня для пояснення.

Перевірка засвоєння знань минулих уроків

Вчитель задає питання по матеріалу який був пройдений з метою його закріплення. Викликаючи учнів.

- Що таке числова послідовність?
- Які члени можуть бути числовою послідовністю?
- Які бувають числові послідовності?
- Що таке арифметична прогресія?
- Що таке різниця арифметичної прогресії?
- Яка формула n -го члена арифметичної прогресії?

Пояснення нового матеріалу

Давайте розглянемо з вами декілька послідовностей:

1, 3, 9, 27, 81,...(кожний наступний помножений на 3);

2; -0,2; 0,02; -0,002; 0,0002;...(кожний наступний помножений на -0,1);

2, 4, 8, 16, 32,...(кожний наступний помножений на 2).

Можемо помітити, що їм притаманна певна характеристика, що кожний наступний отримано шляхом множення попереднього на одне і теж саме число, з якої ми можемо вивести означення геометричної прогресії, запишемо його.

***Геометричною прогресією** називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.*

Також запишемо означення знаменника геометричної прогресії, що в подальшому нам допоможе.

*Число, що дорівнює відношенню наступного і попереднього членів послідовності, називають **знаменником** геометричної прогресії та позначають буквою q .*

Записавши означення ми можемо вивести рекурентну формулу:

$$b_{n+1} = b_n q,$$

де (b_n) – n -й член геометричної прогресії, а (q) – знаменник геометричної прогресії

Наведемо кілька прикладів для кращого сприйняття:

Приклад 1

Якщо $b_1 = 3$ і $q = 3$, то ми отримуємо геометричну прогресію, яка являє собою послідовність степенів числа 3:

3, 9, 27, 81, 243,...

якщо $b_1 = 2$ і $q = 2$, то отримаємо геометричну прогресію яка була на початку теми: 2, 4, 8, 16, 32,...

Можемо зробити висновок, що будь-яка відмінна від нуля та у якої всі члени рівні послідовність, одночасно є геометричною і арифметичною прогресією.

За винятком, якщо всі члени послідовності рівні 0, то вона є тільки арифметичною прогресією.

Давайте спробуємо з вами знайти формулу n-го члена геометричної прогресії за допомогою прикладу.

Ознайомившись з означенням геометричної прогресії маємо:

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q)q = b_1 q^2$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2)q = b_1 q^3$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3)q = b_1 q^4$$

Дані приклади дають зрозуміти нам певну закономірність, а саме: щоб знайти будь-який член геометричної прогресії, достатньо один член помножити на степінь з основою q і показником, який буде менший на 1 від номера шуканого члена. Тобто отримуємо формулу n-го члена геометричної прогресії.

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Перевіримо застосування вирішення декількох прикладів, вчитель викликає до дошки учня.

Приклад 2

Знаючи, що $b_1 = 4$, $q = 2$ знайдемо 5 число геометричної прогресії.

Розв'язання

$$b_5 = 4 \cdot (2)^4 = 4 \cdot 16 = 64$$

Відповідь: 64.

Вчитель викликає іншого учня для вирішення завдання.

Приклад 3

Знаючи, що $b_1 = 2$, $q = 0,1$ знайдемо 6 число геометричної прогресії

Розв'язання

$$b_6 = 2 \cdot (0,1)^5 = 2 \cdot 0,00001 = 0,00002$$

Відповідь: 0,00002.

Відпрацювання вмінь та навичок

Переходимо до усних та письмових вправ для відпрацювання засвоєння теми:

1. Укажіть перший член та знаменник геометричної прогресії:
 - 1) 1; -3; 9;...
 - 2) 3; 3; 3;...
 - 3) 27; 9; 3;...
2. Знайдіть другий та третій член геометричної прогресії:
 - 1) $b_1 = 5, q = 2$;
 - 2) $b_1 = 3, q = -1$;
 - 3) $b_1 = 2, q = 3$.

Можна провести невеликий бліц поділивши учнів на три команди та задавати питання у формі тестування, учні матимуть час на вирішення та вибранні правильної відповіді, команда яка перша виконає та правильно назве відповідь отримує бал.

1. Чому дорівнює перший член геометричної послідовності, якщо $b_2 = 54, q = 6$?
 - 1) 1;
 - 2) -1;
 - 3) 2;
 - 4) 48.
2. Яка з послідовностей є геометричною?
 - 1) 2; 5; 8; 11;...
 - 2) 2; 4; 12; 48;...
 - 3) 2; 6; 18; 36;...
 - 4) 2; -4; 8; -16...

3. Третій член геометричної прогресії дорівнює 12, а знаменник дорівнює 3.
Яким буде десятий член геометричної прогресії?

- 1) 9;
- 2) 15;
- 3) 36;
- 4) 48.

Підводимо підсумок

Маю надію, що ви були уважні при вивченні теми, тому давайте відповімо на такі питання:

- Що таке геометрична прогресія?
- Назвіть приклад геометричної прогресії?
- Назвіть формулу n -го члена геометричної прогресії?

Домашнє завдання

Прочитати параграф 18, вивчіть конспект та виконати завдання 18.3, 18.5, 18.7 Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 272 с.[21]

Завдання схожі з тими які ми опрацювали з вами на уроці. Щоб легше було виконувати завдання користуйтеся означеннями та формулами, які ми з вами сьогодні вивчили. Дякую за урок, успіхів та натхнення.

Висновок до Розділу 2

У цьому розділу ми провели аналіз змістової лінії “Числові послідовності” у програмах шкільного курсу математики. Проаналізували навчальну програму середньої та старшої школи і кількість відведених годин на вивчення теми “Числові послідовності”. Ознайомилися зі змістом навчальної програми та навиками, які здобуває учень. Дослідили особливості введення основних понять з теми “Числові послідовності” у шкільному підручнику. Взявши для аналізу декілька підручників з алгебри 9 класу для розбору викладення теми “Числові послідовності” та порівнявши їх. Було коротко проаналізовано додавання нових понять числової послідовності у курсі математики 10 класу. Написали методичні вказівки до вивчення теми “Числові послідовності”. У розділі присутні конспект уроків з теми “Арифметична прогресія. Формула n -го члену арифметичної прогресії” та “Геометрична прогресія, її властивості”.

Матеріал уроку може бути використаний в подальшому вчителем, для кращого викладення теми та підготовки до уроку.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі досліджувалися методичні особливості вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики.

Для досягнення мети дослідження нами було опрацьовано наукову, навчальну та методичну літературу, було здійснено аналіз останніх досліджень і публікацій з даної теми. У роботі викладено основні напрацювання наступних дослідників: Г.П. Бевз, З.І. Слєпкань, М.В., Кукуш О. Г., Ушаков Р.П., Карпик В.В., Мордкович А.Г. та інших. З'ясували, що є різні методичні особливості вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики.

Перший розділ присвячений розкриттю змісту основних понять і властивостей числових послідовностей, зокрема арифметичної та геометричної прогресій. Для організації роботи математичного гуртка та факультативу з математики нами було розширено поняття прогресій шкільного курсу алгебри, а саме поняттями гармонічна, квадратична, логарифмічна та степенева прогресії. Також введено поняття рекурентного співвідношення, розглянуто властивості таких співвідношень і як приклад розглянуто послідовність Фібоначчі.

Опрацювавши діючі навчальні програми з математики для учнів 5-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівнів стандарт, поглиблений та профільний, можна зробити висновок, що арифметична та геометрична прогресії, їх властивості; формули n -го члена; формули суми перших n членів арифметичної та геометричної прогресій є основним змістом навчального матеріалу з теми «Числові послідовності». Уявлення про границю послідовності і обчислення суми нескінченної геометричної прогресії є пропедевтичною базою для подальшого вивчення курсу математичного аналізу. У десятому класі до змісту навчального матеріалу належать: важливі класи числових послідовностей (монотонні, обмежені тощо); границя числової послідовності; геометрична інтерпретація границі числової послідовності; основні теореми про границі числових послідовностей; число e .

Для аналізу діючих підручників з математики з теми «Числові послідовності» були вибрані лише деякі підручники з алгебри основної школи рекомендовані Міністерством освіти і науки України авторів Г.П.Бевз, В.Г. Бевз, А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М. С. Якір та О.С Істер. Можна зробити висновок, що в усіх підручник наводяться коректні означення числових послідовностей, мають чіткі доведення тверджень, матеріал у достатній кількості продемонстровано прикладами. У всіх підручниках важлива інформація виділена кольором чи шрифтом, що дає змогу сфокусуватися на певній інформації. Також є історичні цікавинки, що дає змогу учню пізнати тему з початку її виникнення. Таким чином весь наведений матеріал дає змогу легко освоїти цю тему учням.

У роботі розглянуто методичні особливості вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики. Зокрема, звернута увагу на очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів, описано послідовність і коректність введення понять, властивостей і формул для знаходження шуканих величин. Наведено приклади розв'язання вправ при вивченні числових послідовностей, арифметичної та геометричної прогресій. Не обійшли стороною і методичні вказівки розгляду теми «Числові послідовності» в старшій школі, а саме введення поняття границя числової послідовності, формулювання теорем про арифметичні дії зі збіжними послідовностями та властивості збіжних послідовностей.

У роботі наведено власні розробки конспектів уроків з математики для учнів 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів на тем: «Арифметична прогресія. Формула n -го члена арифметичної прогресії», «Геометрична прогресія, її властивості».

Матеріали кваліфікаційної роботи можуть бути використані студентами педагогічних закладів вищої освіти та педагогічними працівниками під час викладання математики у шкільному курсі та для організації роботи математичного гуртка та факультативу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бас В. М., Бас С. В., Федчунов А. Послідовності в 5-6 класах як засіб розвитку мислення / Бас В. М. // журнал математика в школах України. – 2020. - №13-15. – С. 38-39.
2. Бевз Г. П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с.
3. Бевз Г. П. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2018. — 336 с.
4. Вишенський О. Числа Фібоначчі й піфагорові трійки в одній задачі. / Вишенський О. // Журнал "У світі математики". – 2005. - № 3. – С. 23-24.
5. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1984. – 144 с.
6. Дечева. В.П. Арифметична прогресія 9 клас. / Дечева. В.П. // Журнал “Математика в школах України”. – 2020. - №1-3. – С. 25-26.
7. Іванна Братусь. Числові послідовності та їх застосування. С. 56-60.
8. Інютін, Е.В. Геометрична прогресія в економіці [Текст] / Е.В.Інютіна, А.С. Смирнов // Математика в школі, -. 2001. - №5. - С.27-31.
9. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. Закл. / О.С. Істер. – Київ : Генеза, 2017. – 264с.
10. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу : (профіль. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. С. Істер, О. В. Єргіна. — Київ : Генеза, 2018. — 448 с.
11. Карпик В. В. Числові послідовності / В. В. Карпик / Математика в школах України. – 2011. – №10. – С.61-64.
12. Клепко В.Ю., Голєць В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. 2-ге видання. К. : Центр учбової літератури, 2009. 594 с.
13. Коваль Н. М. Числові послідовності. / Коваль Н. М. // Журнал “Математика в школах України”. - 2007. - №2. – С. 19-20.

14. Копилев О. А. Застосування геометричної прогресії в економіці / О.А. Копилева // Математика в школі. – 2001. – №12. – С. 5-6.
15. Кравчук В. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / В. Кравчук, М. Підручна, Г. Янченко. — Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. — 264 с.
16. Кукуш О. Г. На допомогу керівникам математичних гуртків. Частина 1. Послідовність / О. Г. Кукуш, Р. П. Ушаков. Х. : Основна, 2010. – 127 с.
17. Лисенко Т. Арифметична та геометрична прогресія / Т. Лисенко // Математика в школі. – 2010. – №26. – С.22-23.
18. Лісова Т. Числові послідовності. Розв'язування вправ / Т. Лісова // Математика в школі. – 2007. – №2. – С.25-32.
19. Лунга К. Н. Числові послідовності / К. Н. Лунга // Журнал математика в школі. – 2006. – №10. – С. 36-37.
20. Макаричев, Ю. В. Дидактичні матеріали з алгебри для 9 класу [Текст]: навчально-методичний посібник / Ю. В.Макаричев - К.: Просвіта, 2013. - 178с.
21. Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 272 с.
22. Мерзляк А. Г. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 416 с.
23. Мерзляк А. Г. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В.Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с.
24. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти /

- А.Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2018. – 512с.
25. Мордкович А. Г. Дві дюжени задач на прогресії / А. Г. Мордкович // Квант. – 1997. – №2. – С.37-43.
 26. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>.
 27. Навчальна програма з математики для Учнів 10-11 класів (початок вивчення на поглибленому рівні з 8 класу) загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений рівень [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>.
 28. Навчальна програма з математики для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi>.
 29. Науковий пошук молодих дослідників: збірник наукових праць студентів, магістрантів та викладачів / за заг. ред. Карплюк С. О., Постової С.А., Вербівського Д. С., Єремєєвої В. М. – Житомир : Видво ЖДУ ім. І. Франка, 2021. – Вип. 14. – 178 с.
 30. Ніколаєнко В. Прогресія та їх практичне застосування / В. Ніколаєнко // Математика в школі. – 2010. – №18. – С. 18-20.
 31. Обрізків Б. В., студ. 4-го курсу спеціальність 014.04 «Середня освіта (Математика)» Науковий керівник: к.ф.-м.н., доц. Тегза А. М. Застосування різних методів у дослідженні сум членів числових послідовностей. – 48 с.
 32. Петровска Н. А. Колекція нестандартних задач на прогресії / Н. А. Петровска // Математика в школі. – 1991. – №2. – С.60-70.
 33. Попов Є. Прогресії та їх середні / Є. Попов // У світі математики. – 1977. – №18. – С. 112-129.

34. П'яникова С. К. Арифметична прогресія. / П'яникова С. К. // Журнал “Математика в школах України”. - 2007. - №13-14. – С. 33-34.
35. Стаття математикині Ірини Єгорченко «Гроші, піраміди і мрії». – 6 с.
36. Стаття Пасічник Я. А. “Реалізація принципу доступності в процесі формування поняття числової послідовності у студентів вищої школи”. – 4 с.
37. Устенко Н. А. Геометрична прогресія та її властивості. Формула n -го члена. / Устенко Н. А. // Журнал “Математика в школах України”. – 2020. – № 1-3. – С. 23-24.
38. Ушаков Р. П. Дослідження на збіжність однієї послідовності / Р. П. Ушаков // Математика. – 1999. – №18. – С. 6-7.
39. Ушаков Р. П. Дослідження на збіжність однієї послідовності / Р. П. Ушаков // Математика. – 1999. – №18. – С. 6-7.
40. Шкільний курс математики і методика його навчання: алгебра основної школи. Методичні рекомендації до самостійної роботи студентів денної форми навчання / Укладач: А. С. Кушнірук. – Одеса: ФОП Бондаренко М. О., 2018. – 60 с.