

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Безлюдна Тетяна Григорівна

**ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ОЗНАЙОМЛЕННЯ
ШКОЛЯРІВ ІЗ ЛОГІЧНОЮ ПОБУДОВОЮ ГЕОМЕТРІЇ НА
АКСІОМАТИЧНІЙ ОСНОВІ**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань : 01 Освіта/ Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:

_____ О.С.Чашечникова
доктор педагогічних наук, професор,
професор кафедри математики,
фізики та методик їх навчання

« » _____ 2023 року

Виконавець:

_____ Т.Г.Безлюдна

« » _____ 2023 року

Суми – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. АКСІОМАТИЧНА ПОБУДОВА ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ	7
1.1. Основні поняття та основні етапи розвитку аксіоматичного методу в науці.....	7
1.2. Побудова системи аксіом у шкільному курсі математики.....	13
1.3 Проблема важливості ознайомлення сучасних школярів із побудовою геометрії на аксіоматичній основі.....	21
Висновки до першого розділу.....	24
РОЗДІЛ 2 ОЗНАЙОМЛЕННЯ УЧНІВ З ЛОГІЧНОЮ ПОБУДОВОЮ ГЕОМЕТРІЇ НА АКСІОМАТИЧНІЙ ОСНОВІ.....	25
2.1. Специфіка систем аксіом шкільного курсу.....	25
2.2. Психолого-педагогічні особливості учнів у контексті проблеми	28
2.3. Аналіз підручників геометрії для старшої школи у контексті дослідження.....	31
2.4. Перші уроки стереометрії.....	35
Висновки до другого розділу.....	47
ВИСНОВКИ.....	50
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	52
ДОДАТКИ.....	58

ВСТУП

Актуальність теми. Питання про знайомство з аксіоматичним методом в школі, про логічну суворість у навчанні математики є предметом дискусії, яка найгостріша саме в галузі навчання геометрії.

Специфіка математики як науки в тому, що одні твердження постулюються, істинність інших доводиться за правилами логіки. Математична теорія будується на аксіоматичній основі. Аксіоми приймаються без доведень. Інші твердження потребують доведення (навіть ті, що є інтуїтивно очевидними). Це називають математичною строгістю. Деякі дослідники вважають, що у історичному розвитку математичної науки були періоди надмірного захоплення формалізмом. Також посилаються на те, що випускники сучасних вітчизняних шкіл не вміють застосовувати математику у реальному житті, тому пропонують іноді взагалі не знайомити учнів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі. Ми не погоджуємось з цим і вважаємо, що математична строгість є необхідною й у шкільному курсі математики.

Проблема виникнення освітніх втрат з математики у сучасних умовах, нестача часу на вивчення математики знов породила запитання – чи дійсно необхідно знайомити учнів з побудовою геометрії на аксіоматичній основі (приклад такої побудови – у підручнику О. В. Погорєлова [43,44], який, по суті, зробив революцію у побудові шкільного курсу геометрії).

Ознайомлення з логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі є школою мислення для школярів [50].

Тому нами обрана тема кваліфікаційної роботи **«Теоретико-методичні аспекти ознайомлення школярів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі»**.

Мета роботи і завдання дослідження: обґрунтувати доцільність ознайомлення школярів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі.

Відповідно до мети дослідження сформульовано такі **завдання**:

- 1) проаналізувати етапи становлення аксіоматичного методу в геометрії;
- 2) проаналізувати специфіку підходів до побудови системи аксіом у шкільному курсі геометрії;
- 3) проаналізувати підручники геометрії у контексті дослідження;
- 4) розглянути психолого-педагогічні особливості учнів підліткового та юнацького віку з точки зору можливості сприймати відомості щодо логічної побудови геометрії на аксіоматичній основі;
- 5) розробити конспекти перших уроків стереометрії.

Об'єкт дослідження: процес навчання геометрії у закладах загальної середньої освіти.

Предмет дослідження: процес ознайомлення учнів з логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі.

Матеріали та методи дослідження. Для досягнення мети й виконання окреслених завдань використано комплекс методів дослідження.

1) **теоретичні:** аналіз наукової, психолого-педагогічної, науково-методичної літератури;

2) **емпіричні:** діагностичні (тестування, анкетування стосовно основних питань з проблеми дослідження); фрагмент педагогічного експерименту.

Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків до кожного розділу, висновків, списку використаних джерел, додатків.

У **вступі** розглянуто актуальність проблеми, мету та завдання дослідження, об'єкт та предмет дослідження.

У **першому розділі** «Аксіоматична побудова шкільного курсу геометрії» розглядаються основні поняття та основні етапи розвитку аксіоматичного методу в науці, специфіка побудови системи аксіом у шкільному курсі математики; на основі аналізу результатів анкетування вчителів та учнів та тестування обґрунтовано важливість ознайомлення сучасних школярів із побудовою геометрії на аксіоматичній основі.

У другому розділі «Ознайомлення учнів з логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі» розглянуто специфіку систем аксіом шкільного курсу геометрії, психолого-педагогічні особливості учнів у контексті дослідження, проаналізовано підручники геометрії для старшої школи, запропоновано конспекти перших уроків стереометрії.

Ознайомлення учнів з логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі є проблемою, яка потребує дослідження, починаючи з пропедевтичного курсу геометрії, але обсяг кваліфікаційної роботи не дозволяє розглядати питання так широко. Тому у роботі зосередимся саме на навчанні геометрії у старшій школі.

У **висновках** представлені висновки до роботи.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що запропоновано підхід до формування системи аксіом групи С.

Практична значущість полягає в розробці конспектів перших уроків стереометрії.

Апробація результатів та публікації. Основні результати дослідження оприлюднені на IV Всеукраїнській дистанційній науково-методичній конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023» ФМД (Суми, 2023); підсумковій науковій студентській конференції фізико-математичного факультету (Суми, 2023). Подано до друку статтю у фаховий збірник наукових робіт «Актуальні питання природничо-математичної освіти» (у співавторстві з науковим керівником проф. О. С. Чашечниковою), тези у збірник матеріалів Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю студентів, аспірантів і молодих учених «Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання» (на базі природничо-математичного факультету Національного університету імені Т. Г. Шевченка «Чернігівський колегіум» у співавторстві з науковим керівником проф. О. С. Чашечниковою).

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Кваліфікаційна робота підготовлена згідно з темою науково-дослідної роботи кафедри математики, фізики та методик їх навчання Сумського державного педагогічного університету імені А.С. Макаренка «Розвиток інтелектуальних вмінь та творчого мислення учнів та студентів при вивченні математики» (номер державної реєстрації 0123U101898).

Структура та обсяг роботи: всього 60, основний текст 57, використаних джерел 56.

РОЗДІЛ 1

АКСІОМАТИЧНА ПОБУДОВА ШКІЛЬНОГО КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ

1.1. Основні поняття та основні етапи розвитку аксіоматичного методу в науці.

Аксіоматичний метод – фундаментальний метод організації і розвитку наукового знання – сформувався протягом більше ніж двохтисячолітньої історії розвитку науки. Аксіоматичний метод – це спосіб побудови наукової теорії, при якому в основу теорії покладаються деякі вихідні положення, які називаються аксіомами теорії, а всі останні твердження теорії одержуються як логічні наслідки аксіом. Такі положення знаходимо у підручниках з «Основ геометрії» [29;47].

Геометри визначають, що у зв'язку з аксіоматичною побудовою геометрії виникають три питання, які в першу чергу розглядаються в основах геометрії:

1. Аксіоми є твердженнями, які описують властивості / взаємне розміщення геометричних фігур. Чи можна їх вивести за допомогою логічних міркувань з інших тверджень?
2. Чи можливо, спираючись на аксіоми, шляхом логічних міркувань вивести наслідки, що є запереченням один одного?
3. Чи можна доповнити існуючу систему аксіом новими аксіомами, які не є наслідками аксіом даної системи, і не суперечать аксіомам даної системи?

У шкільному курсі математики аксіоми пов'язуються більше з курсом геометрії, ніж з курсом алгебри і початків аналізу. В геометрії формулюються аксіоми, з них вибудовується система, а з аксіом за допомогою логічних міркувань виводяться твердження / доводяться теореми.

Формування сучасного розуміння сутності аксіоматичного методу відбувалося у процесі розвитку науки, перш за все – геометрії.

У розвитку аксіоматичного методу виділяють три етапи [29]:

1. Від Евкліда до середини XIX сторіччя.

2. Середина XIX сторіччя. Цей період пов'язаний з відкриттям Миколою Лобачевським неевклідової геометрії. Також в цей час активно створюються інші аксіоматики евклідової геометрії: Гільберта, Вейля та інших.

3. На початку XX сторіччя виникли труднощі в обґрунтуванні математики, обумовлені появою парадоксів в теорії множин. Для подолання цих труднощів Гільберт запропонував свою теорію доведень, яка була названа метаматематикою.

У VII ст. до н.е. математичні знання Стародавнього Єгипту і Вавилону проникають у Стародавню Грецію. Основні закони логіки виклав Арістотель (IV-III ст. до н.е.). Одною із найбільш видатних та найбільш відомих праць вчених Давньої Греції є «Начала» Евкліда. Евклідом було зібрано в одному науковому творі ті основні знання, що були накопичені до того часу грецькими математиками, і що заклали основу сучасної геометрії. До цього існувало нагромадження розрізнених геометричних фактів, між якими необхідно було встановити зв'язки, які необхідно було систематизувати.

Вважають, що саме Евклід зробив першу відому і успішну спробу викласти геометричні факти логічно та послідовно.

Книга «Начала» починається з означень та аксіом, а далі колосальна будівля геометрії будується на основі цих аксіом логічним, дедуктивним шляхом. Кожне геометричне твердження, що не є аксіомою, строго доводиться.

Саме «Начала» вважають початком використання аксіоматичного методу, прикладом змістовної аксіоматичної теорії.

Праця Евкліда була та залишається предметом вивчення, дослідження і наслідування протягом багатьох століть. До першої половини XIX століття - період наївно-аксіоматичної побудови геометрії.

Аксіома паралельності Евкліда, або п'ятий постулат — одна з аксіом, що лежать в основі класичної планіметрії. Вперше наведена в «Началах»

Евкліда: «Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπλῖπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες» (переклад з грецької - «Якщо пряма, що перетинає дві інші прямі, утворює внутрішні односторонні кути, які менші, ніж два прямі кути, то ці дві прямі перетнуться як завгодно далеко з тієї сторони, де кути»).

П'ятий постулат дуже сильно відрізняється від інших постулатів Евкліда. Всі інші - прості та інтуїтивно очевидні. Тому протягом двох тисячоліть тривали дискусії та не припинялися спроби «перенести» п'ятий постулат із системи аксіом до складу теорем геометрії. «Ймовірно, неможливо в науці знайти більш захопливу і драматичну історію, ніж історія п'ятого постулату Евкліда» [21]. Ці пошуки привели до перегляду наукових уявлень про геометрію.

Більше двох тисяч років називати геометрію «евклідова геометрія» не мало сенсу – жодна інша геометрія ще не існувала. Аксіоми Евкліда здавались настільки очевидними (за винятком аксіоми паралельності), що будь-яка теорема, що випливала з них, вважалася справедливою.

Але на початку XIX сторіччя через спроби доведення п'ятого постулату Евкліда епоха царювання «евклідової геометрії» підходила до кінця. Пошуки доведення п'ятого постулату призвело до нового розуміння основ геометрії і нового кроку в розумінні суті аксіоматичного методу. Це називають революцією Лобачевського, межею двох епох в історії геометрії. Професор Казанського університету Микола Іванович Лобачевський повідомив про нього 25 лютого 1826 р. на засіданні ради факультету, а потім опублікував через три роки працю «Про начала геометрії».

Відмічають, що Лобачевський, а за ним Я. Бойяї, встановили: замінивши п'ятий постулат Евкліда про паралельні його запереченням, можна створити логічним шляхом геометрію, таку ж логічно струнку, як і «евклідова геометрія».

Це створило підґрунтя для нового погляду на сутність аксіоматичного методу: аксіоми – це не самоочевидні істини, а твердження про початкові поняття, що приймаються без доведення і кладуться в основу теорії, з яких всі інші твердження теорії логічно виводяться. Істинне те, що може бути логічно доведено з прийнятих аксіом.

Зазначають, що відкриття неевклідових геометрій стимулювало розвиток аксіоматичного методу, виникнення нових ідей та постановку проблем та завдань, що пов'язані з поняттям побудови аксіоматичних теорій, таких, як проблеми несуперечливості, повноти і незалежності тієї чи іншої системи аксіом.

Коли ідеї М. І. Лобачевського були визнані математиками, знов постала проблема аксіоматичної побудови геометрії. Найбільшу популярність дістав твір видатного німецького математика Д. Гільберта «Основи геометрії» (1899 р.) [21], у якому наведено повну систему аксіом евклідової геометрії, з яких всі останні твердження геометрії можуть бути доведені логічним шляхом, доведено несуперечливість цієї системи аксіом при умові несуперечливості теорії дійсних чисел і незалежність деяких аксіом від інших аксіом системи.

Принципова відмінність постановки питання про аксіоматичне обґрунтування геометрії у Гільберта: Евклід запропонував ідеал строго логічного викладу геометрії, згідно якому необхідно строго відділити мінімум того, що взято з певною мірою абстракції з реального досвіду та геометричної інтуїції, і сформулювати у вигляді аксіом, від того, що повинно бути виведено з аксіом виключно логічним шляхом через математичні міркування.

Шлях розвитку геометрії довжиною у сторіччя від Евкліда до Гільберта показує, наскільки було важко здійснити це завдання.

В. Ф. Каган написав: «Споглядання накреслює, логіка перевіряє; споглядання передбачає, логіка встановлює; споглядання відкриває, логіка доводить» (цитуюмо за [29]). Одна логіка не може пояснити, чому у якості

аксіом вибирається саме конкретне твердження, тут велику роль відіграє досвід, інтуїція, наочні уявлення, рисунок.

До Гільберта під аксіомами геометрії розумілись конкретні пізнавальні істини, які стосуються цілком певних конкретних об'єктів – точок, прямих, площин, які пов'язані з певними просторовими уявленнями. Але, якщо геометричні поняття про точку, пряму, площину нерозривно пов'язувати лише з конкретними наочними уявленнями, то це призводить до втрати узагальненості. Такі підходи ми бачили у деяких шкільних підручниках кінця XX – початку XXI сторіччя.

Якщо поставлено завдання скласти повний перелік аксіом, то необхідно усунути вплив наочних уявлень на міркування, добитись найбільшої загальності і застосовності одержання висновків до вивчення об'єктів реального світу. Д. Гільберт встановив нову точку зору на основні поняття і аксіоми геометрії: основні поняття геометрії й похідні з них не пов'язуються з конкретними об'єктами, вони вводяться без прямих означень і все, що про них необхідно знати, викладається в аксіомах. Аксіоми Гільберта є в цьому розумінні непрямыми (неявними) означеннями основних понять.

Гільберт припускає існування трьох різних систем об'єктів, які називають «точками», «прямими», «площинами»; припускається, що «точки», «прямі», «площини» знаходяться в деяких взаємних відношеннях, які позначаємо словами «лежати», «між», «конгруентні»; повне описання цих відношень дається у аксіомах.

Зазначають [29], що з виходом праці Гільберта питання про логічне обґрунтування геометрії фактично було закрито. Більше того, були остаточно усвідомлені ті ідеї і принципи, які характеризують суть аксіоматичного підходу до обґрунтування геометрії, а також – суть аксіоматичного методу взагалі. Слід відзначити, що різні системи аксіом, що виходять з різних початкових (основних) понять, будувались як до виходу книги Д. Гільберта (наприклад, Маріо Пієрі, Моріц Паш), так і після їх виходу, аж до початку

20-х років XX сторіччя (наприклад, В. Каган, Г. Вейль). Цим був завершений другий етап розвитку аксіоматичного обґрунтування геометрії – абстрактно-аксіоматична побудова геометрії. Геометрія розглядається як напівформальна аксіоматична теорія.

Наступним називають етап формально-аксіоматичного обґрунтування. Дослідження, що були розпочаті М. Лобачевським, привели до того, що на початку XX сторіччя було сформульоване фундаментальне поняття сучасної математики – поняття (математичного або геометричного) простору як деякої сукупності однорідних об'єктів довільної природи (точок, векторів, фігур, функцій та інше), взаємні відношення між якими задовольняють тій чи іншій системі аксіом. Отже вважають, що різні математичні простори є моделями тих чи інших аксіоматичних теорій, побудованих на відповідних системах аксіом. Таке розуміння дозволило геометричним ідеям проникнути у різні галузі математики, фізики та інших наук. Зазначають [29]: геометрія стала розгалужуватись, математика набула «єдності», межі її різноманітних галузей стали менш чіткими. Математична логіка з'єднала основи всіх галузей математики – з її допомогою був досліджений сам процес доведення, процес виведення теорем з аксіом. Тим самим аксіоматичний метод одержав подальший свій розвиток і досяг в певному розумінні вершини. Аксіоматичні теорії стали точними математичними об'єктами, названими формальними системами, і почали вивчатись математичними методами (методами математичної логіки), почала будуватись теорія таких математичних теорій (теорія формальних систем), що називається метатеорією. Цей напрям був розпочатий в роботах Гільберта і одержав назву методу формалізації в обґрунтуванні математики. В рамках метатеорії геометрії були доведені несуперечливість, категоричність, повнота аксіоматичної теорії евклідової геометрії, а також неевклідових геометрій. Можна сказати, що в XX ст. відбувся третій етап розвитку аксіоматичного обґрунтування геометрії і розвитку аксіоматичного методу взагалі – етап формально-аксіоматичного обґрунтування.

У 1918 році німецьким математиком Г.Вейлем була запропонована точково-векторна аксіоматика евклідової геометрії, основні об'єкти якої «точка» та «вектор». Основними відношеннями є «додавання векторів», «множення вектора на число», «скалярний добуток векторів», «відкладання вектора від точки». Аксіоматика Вейля складається з п'яти груп аксіом. Аксіоми перших трьох груп складають аксіоматику векторного простору, перших чотирьох груп – аксіоматику векторного евклідового простору, всю систему аксіом називають ще системою аксіом евклідового точково-векторного простору. Були спроби побудувати шкільний курс геометрії на основі аксіоматики Вейля, але вони виявились провальними через невідповідність віковим особливостям школярів (дослідження, що лягли в основу [48]).

Характерною рисою аксіоматичного методу є його абстрактність.

Аксіоматичний метод є цінним інструментом наукових досліджень, за допомогою якого вдається розкрити зв'язки між поняттями та математичними теоріями. Він дозволяє зробити викладення теорії математично строгим.

1.2. Побудова системи аксіом у шкільному курсі математики

Аксіомою називається твердження, яке приймається без доведення.

Твердження, справедливність якого перевіряється доведенням, називається теоремою.

Під доведенням розуміють ланцюжок тверджень, які впливають одне з іншого за правилами логіки. Строго довести яке-небудь твердження означає вивести його з аксіом.

Твердження, що встановлює зміст нового поняття та розкриває смисл нового терміну, називається означенням. Як правило, означення нового поняття дається на базі раніше означених, тобто маємо справу з неперервним

ланцюжком означень. Тому виникає необхідність прийняти без означення деякі поняття. Їх називають основними або неозначуваними. Основні поняття діляться на основні об'єкти та основні відношення.

Таким чином, дедуктивна схема викладення теорії полягає в наступному (описано у [48]):

- 1) перераховуються основні (неозначувані) поняття;
- 2) за допомогою основних (неозначуваних) понять даються означення інших понять;
- 3) формулюються аксіоми (система аксіом) – як властивості основних понять та відношень;
- 4) на базі аксіом доводяться теореми.

Сутність аксіоматичного методу полягає в наступному:

- кожне поняття повинно бути або внесено до списку не означуваних понять, або означене;
- кожне твердження повинно бути або внесено до списку аксіом, або доведене.

Вимоги до системи аксіом

1. Несуперечливість (сумісність).
2. Незалежність (мінімальність).
3. Повнота (достатність).

Система аксіом називається *внутрішньо несуперечливою*, якщо з неї не можна вивести два протилежних твердження.

Система аксіом називається *змістовно несуперечливою*, якщо існує хоча б одна її модель. Отже, питання про змістовну несуперечливість системи аксіом зводиться до питання несуперечливості її моделі.

Система аксіом називається *повною*, якщо її не можна доповнити твердженням, яке б:

- 1) не суперечило аксіомам системи;
- 2) не залежало від аксіом системи;
- 3) не вводило нових неозначуваних понять.

Підручник А. П. Кисельова (1962) було створено ще XIX столітті. Перше видання вийшло у 1892 році. За структурою підручник повторює відомий на той час підручник Давидова, з більш строгими доведеннями, спрощеннями і скороченнями. А. П. Кисельов виключив із підручника інверсію, полярні, формулу Брахмагупти та теорему Чеви. У 1938 році, після виправлень та доповнень, внесених Нілом Олександровичем Глаголевым, підручник отримав офіційне твердження як стабільний та єдиний підручник з геометрії радянської середньої школи. У редакції Н.О. Глаголева було продовжено курс на спрощення матеріалу. При цьому редакція Н.О. Глаголева отримала негативні відгуки.

Одночасно з підручником за редакцією Глаголева видавався варіант підручника «для вчителів» — видання самого Кисельова 1931 року у двох частинах — відповідно «Планіметрія» для 6—8 та «Стереометрія» для 9—10 класів [33; 34; 35] і доповнювався «Збірником завдань з геометрії». А. Рибкіна. прослужив як основний підручник до середини 1970-х років.

Підручник А.П. Кисельова швидко завоював популярність, до революції він витримав 26 перевидань. Він пережив післяреволюційні реформи освіти. Було продовжено курс на скорочення абстрактного матеріалу; наприклад, А.П. Кисельов прибрав тотожність Птолемея, теорему про коло Аполлонія, ознаки рівності тригранних кутів. Деякі доведення викладалися менш суворо. При цьому було додано практичний матеріал.

Аксіоматична основа підручника - аксіоматика Д. Гільберта. Сам список аксіом Гільберта наводиться як додатковий матеріал, вони були дуже складними для шкільного курсу.

У 1971 році, після реформи освіти, цей підручник було замінено на підручник А. М. Колмогорова, О. Ф. Семеновича, Р. С. Черкасова [36]. Аксіоми у цьому підручнику формулювалися зрозуміло, але були розпорошені по всьому підручнику. Тому у школярів виникали незрозуміння того, чому одні зрозумілі твердження є аксіомами, а інші, також зрозумілі, ні. У додатках до підручника було запропоновано матеріал щодо логічної

побудови геометрії. Наступними стали підручники О.В. Погорєлова [43; 44] та авторського колективу під керівництвом Л.С. Атанасяна [16].

Підручник О. В. Погорєлова [43; 44] визнаний науковцями класичним. У ньому компактно представлено систему аксіом, логічна побудова коректна і строго обґрунтована, витриманий принцип науковості (про це писали не лише науковці у галузі методики математики І.Ф.Тесленко, Л.Г.Чашечнікова, але й геометри, зокрема, С.М.Чашечніков) [48].

Аксіоми планіметрії.

I. Аксіоми належності

I_1 . Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

I_2 . Через будь-які дві точки можна провести пряму лінію і тільки одну.

II. Аксіоми порядку

II_1 . Із трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.

II_2 . Пряма розбиває площину на дві півплощини.

Якщо кінці будь-якого відрізка належать одній із півплощин, то відрізок не перетинає пряму. Якщо ж кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.

III. Аксіоми вимірювання відрізків і кутів

III_1 . Кожний відрізок має певну довжину, більшу нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

III_2 . Кожний кут має певну градусну міру, більшу нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180° . Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

IV. Аксіоми відкладання відрізків і кутів

IV_1 . На будь-якому промені від його початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини і тільки один.

IV_2 . Від будь-якого променя у вибрану півплощину можна відкласти кут заданої градусної міри, меншої 180° , і тільки один.

IV₃. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому в заданому розміщенні відносно заданого променя.

V. Аксиома паралельних

V₁. Через точку, яка не лежить на заданій прямій, можна провести на площині не більше одної прямої, що паралельна заданій.

У старшій школі вводиться група аксіом C.

C₁. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй (порівняйте з аксіомою I₁).

C₂. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

C₃. Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Отже, система аксіом О. В. Погорелова складається з десяти аксіом планіметрії (п'ять груп) та трьох аксіом групи C.

Аксиоматика Д. Гільберта містить 20 аксіом, які поділені на 5 груп.

Аксиоми належності. Аксиоми Гільберта цієї групи описують властивості взаємного розташування точок, прямих і площин. У підручнику Л.С. Атанасяна [16] аксиоми цієї групи також характеризують взаємне розташування точок, прямих і площин. Але в аксиоматиці Гільберта їх усього вісім, а в підручнику Л.С. Атанасяна до цієї групи аксіом належить десять аксіом. До шкільної аксиоматики включено аксиоми, що стосуються поняття променя, напівплощини та напівпростору, чого немає в I групі аксиоматики Гільберта. Ще однією особливістю аксіом цієї групи є те, що в аксиоматиці Гільберта використовується термін «Хоч би якими були дві точки...», а з іншого боку в шкільному підручнику використовується термін «Через будь-які дві (три) точки...».

Аксиоми у підручнику авторського колективу під керівництвом Л.С. Атанасяна з 1 по 7 побудовані більш спрощено для розуміння школяра, але кожна з аксіом з 8 по 10 дають одразу кілька різних відношень для

площин, точок, променів, простору і напівпростору, що може викликати труднощі в загальному розумінні окремо взятої аксіоми.

Можна проаналізувати відповідність аксіом Гільберта й аксіом шкільного підручника Л.С. Атанасяна [16].

Аксіоми належності. I_1 Якими б не були дві точки A і B , існує пряма a , що проходить через ці точки.

I_2 Якими б не були дві точки A і B , існує не більше однієї прямої, що проходить через ці точки.

У підручнику Л.С. Атанасяна аксіома 1 відповідає аксіомі I_1 .

1. Через дві точки проходить одна і тільки одна пряма.
2. На кожній прямій лежать щонайменше дві точки. Існують щонайменше три точки, що не лежать на одній прямій.
3. Через кожні три точки, що не лежать на одній прямій, проходить одна і тільки одна площина.
4. Якщо дві точки прямої належать деякій площині, то й усі точки цієї прямої належать зазначеній площині.
5. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони мають принаймні ще одну спільну точку. (Це заплутує школярів).

Аксіоми порядку

1. Якщо точка B лежить між точками A і C , то вона лежить між точками C і A .
2. Для будь-яких двох точок прямої A і B існує на цій прямій така точка C , що точка B лежить між точками A і C .
3. Із трьох точок на прямій не більше ніж одна лежить між двома іншими.

Серед аксіом Гільберта аксіоми конгруентності, аксіома паралельних, аксіоми неперервності.

1. На даній прямій по дану сторону від даної на ній точки можна відкласти відрізок, що дорівнює даному, і до того ж єдиним чином.
2. Два відрізки, кожний з яких рівний третьому, рівні між собою.

3. Нехай на деякій прямій точка B лежить між точками A і C і на деякій іншій або тій же прямій точка B_1 лежить між двома точками A_1 і C_1 . Якщо при цьому відрізок AB дорівнює відрізку A_1B_1 і відрізок BC дорівнює B_1C_1 , то $AC = A_1C_1$.

4. По дану сторону від даного променя можна відкласти даний кут і до того ж єдиним чином.

5. Два кути, кожний з яких рівний третьому, рівні між собою.

Стверджується, що пряма є безперервною.

Основною важливою особливістю підручника геометрії О.В. Погорелова [43; 44] є традиційний зміст. Але це не означає, як вважав автор та автори методичних рекомендацій до викладання геометрії за цим підручником [48], що у підручнику зроблено просте повернення до традиційної системи. О.В.Погорелов зробив вдалу спробу підняти традиційний шкільний курс геометрії на якісно новий рівень, чого він досяг за допомогою аксіоматичної побудови на основі авторської системи аксіом. Але в навчальному посібнику вона «працює» з основних питань курсу (кути, рівність трикутників, паралельні прямі, теореми про суму кутів трикутника та чотирикутника, теореми Фалеса та Піфагора, подібність трикутників та інше). Питання курсу, що мають прикладне значення, подаються на основі наочних міркувань.

Отже, у підручнику О. В. Погорелова вже на початку вивчення планіметрії учням надається поняття про логічну побудову курсу на аксіоматичній основі.

Порівнюючи аксіоматику шкільного курсу О. В. Погорелова і систему аксіом Гільберта, виокремлюють основні поняття, що використовуються в них. У шкільному курсі основні поняття це точки, прямі, площини і відрізок, також використовуються поняття напівплощини. Гільберт використовує такі основні поняття: точка, пряма, площина. Основні поняття в аксіоматиці Гільберта – лише невизначені.

Аксіоматика Л.С. Атанасяна складається з 16 пунктів, розділених на чотири групи.

I група - аксіоми взаємного розташування точок і прямих та порядку точок на прямій (аксіоми 1-5).

II група - аксіоми накладання та рівності фігур (аксіоми 7-13).

III група - аксіоми вимірювання відрізків та існування відрізка даної довжини (аксіоми 14-15).

IV група – аксіома паралельності (аксіома 16).

Найбільшу схожість аксіом Гільберта й аксіом Л.С. Атанасяна можна відзначити в першій групі аксіом (аксіоми належності), де майже для кожної аксіоми Гільберта можна співвіднести аксіому зі шкільного підручника. Відмінність полягає лише в тому, які терміни при цьому використовуються, в одній аксіомі також може узагальнюватися дві аксіоми Гільберта.

У другій групі аксіом (аксіоми порядку) в аксіоматиці Гільберта вибудовано цілу низку аксіом, в аксіоматиці шкільного підручника наявна єдина схожа аксіома.

Третя група аксіом шкільного підручника у своїй основі має таке поняття як накладення, тобто відображення простору на себе, чого немає в аксіомах Гільберта.

Четверта група аксіом Гільберта описує довжину відрізка і величину кута, а також властивості безперервності розташування точок на прямій. У шкільному підручнику стисло і просто сформульовано дві аксіоми, пов'язані лише з вимірюванням відрізків.

Таким чином, аксіоматика Гільберта хоч і схожа з аксіоматикою шкільних підручників, але має при цьому суттєві відмінності. Аксіоми підручника подано в більш «спрощеному вигляді» спеціально для кращого засвоєння їх школярами. Аксіоми побудовані з використанням інших термінів, але, по суті, є висновками або наслідками аксіом Гільберта.

У підручнику Л. С. Атанасяна та авторського колективу явно (але неповно) і доступно введено поняття про аксіоматичну побудову курсу (деякі

твердження про властивості геометричних фігур приймаються як вихідні положення (аксіоми), на основі яких доводяться далі теореми і, взагалі, будується вся геометрія). Автори не ставили завдання побудови системи незалежних аксіом, тобто вимоги, що жодну з них не можна було вивести з інших. Так, аксіома у їх підручнику може бути доведена на основі інших аксіом. Для спрощення викладу вона прийнята як аксіома, а не теорема. Система аксіом, безперечно, неповна, але достатня для побудови курсу планіметрії.

1.3 Проблема важливості ознайомлення сучасних школярів із побудовою геометрії на аксіоматичній основі

Проблема виникнення освітніх втрат з математики у сучасних умовах, нестача часу на вивчення математики знов породила запитання — чи дійсно необхідно знайомити учнів з побудовою геометрії на аксіоматичній основі (приклад такої побудови — у підручнику О. В. Погорєлова, який, по суті, зробив революцію у побудові шкільного курсу геометрії [43; 44]).

Нами було проведено опитування серед вчителів математики та запропоновані завдання на знання аксіом для учнів 7-11 класів (87 учнів) Улянівського ліцею Миколаївської селищної ради Сумського району Сумської області та 10 класу гімназії №1 м. Суми (36 учнів).

Запитання для вчителів

1. Чи є необхідність вводити аксіоми на початку вивчення геометрії?
2. Чи вимагаєте Ви, щоб учні знали формулювання аксіом напам'ять?
3. Чи доцільний, на Вашу думку, аксіоматичний шлях побудови геометрії?

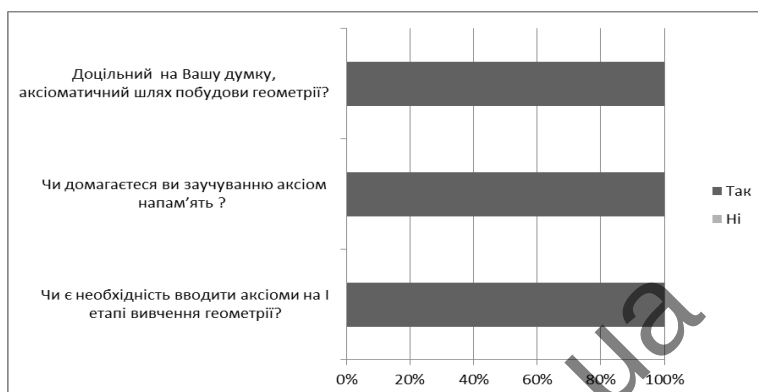


Рис. 1.1. Результати опитування вчителів

100% опитаних вчителів вважають, що знання аксіоматичної побудови геометрії є важливою основою вивчення предмету, адже система аксіом є фундаментом усієї будівлі геометрії [40, с. 117], [48].

Завдання для учнів

- 1.Що таке «аксіома»? (правильно відповіли 70% учнів).
- 2.Чим відрізняються аксіоми від теорем? (правильно відповіли 92% учнів).
- 3.Наведіть приклад використання аксіом для доведення теореми / розв'язування задачі (змогли відповісти 50 % учнів).
- 4.Завдання на формулювання аксіом (вчитель розпочинає формулювати аксіому – учень закінчує) (правильно відповіли 52% учнів).

Також було проведене тестування онлайн учнів щодо знання формулювань аксіом планіметрії (взяло участь 64 учні у 2018 році та 48 учнів у 2022 році) та стереометрії (взяло участь 32 учні у 2019 році та 36 учнів у 2022 році).

Порівняння показало, що відбулося зростання відсотку учнів, що мають низький рівень знання формулювань аксіом планіметрії (на 2,08%) та аксіом групи C (на 4,17%).

Результати представимо у вигляді діаграм.



Рис.2

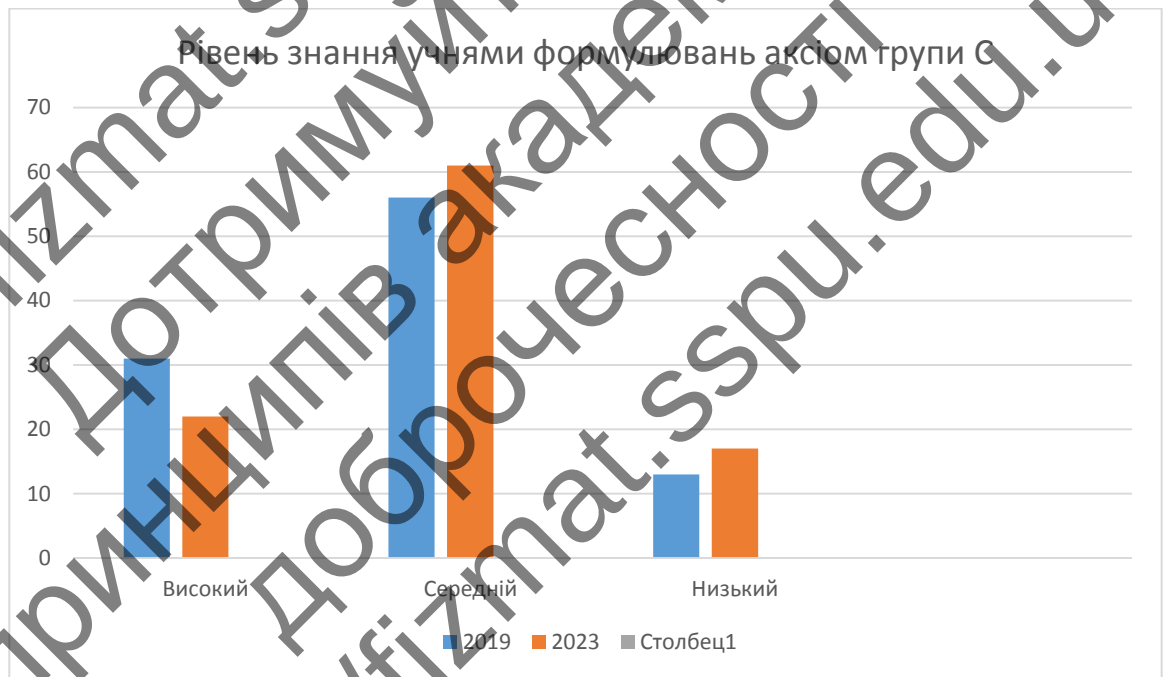


Рис.3

Можна зробити висновок, що ознайомлення учнів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі є необхідним, але дистанційне навчання математики негативно вплинуло на підготовку учнів до сприймання ними побудови системи аксіом, на знання ними формулювань аксіом, на вміння їх застосовувати до доведення теорем та розв'язування задач. Ця проблема потребує вирішення.

І хоча вже з'явилася « Концепція розвитку дистанційної освіти ...» [1; 2], є роботи, зокрема магістрантів [17; 18] щодо вирішення цих питань, але сучасні умови ставлять нові запитання.

Висновки до першого розділу

Аксіоматичний метод є цінним інструментом наукових досліджень, за допомогою якого вдається розкрити зв'язки між поняттями та математичними теоріями. Він дозволяє зробити викладення теорії математично строгим.

Дедуктивна схема викладення теорії полягає в наступному:

- 1) перераховуються основні (неозначувані) поняття;
- 2) з допомогою основних (неозначуваних) понять даються означення інших понять;
- 3) формулюються аксіоми (система аксіом) – як властивості основних понять та відношень;
- 4) на базі аксіом доводяться теореми.

Сутність аксіоматичного методу полягає в наступному:

- кожне поняття повинно бути або внесено до списку неозначуваних понять, або означене;
- кожне твердження повинно бути або внесено до списку аксіом, або доведено.

Вимоги до системи аксіом

1. Несуперечливість (сумісність).
2. Незалежність (мінімальність).
3. Повнота (достатність).

Ознайомлення учнів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі є необхідним, але дистанційне навчання математики негативно вплинуло на підготовку учнів до сприймання ними побудови системи аксіом, на знання ними формулювань аксіом, на вміння їх застосовувати до доведення теорем та розв'язування задач. Ця проблема потребує вирішення.

РОЗДІЛ 2

ОЗНАЙОМЛЕННЯ УЧНІВ З ЛОГІЧНОЮ ПОБУДОВОЮ ГЕОМЕТРІЇ НА АКСІОМАТИЧНІЙ ОСНОВІ

2.1 Специфіка систем аксіом шкільного курсу

Чи потрібно вивчати аксіоматичний метод у класах нематематичного профілю? Оскільки цей метод широко застосовується у математиці, то важливо ознайомити учнів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі. Розуміння сутності аксіоматичного методу позитивно впливає на розвиток мислення школярів.

Розвиток так званого «штучного інтелекту» призводить до того, що у частини суспільства формується споживацьке відношення до навчання. Проте, чого більше приносить у життя штучний інтелект (ШІ) – користі або шкоди – сперечаються найвидатніші вчені та розробники. Винахідник Ілон Маск, фізик Стівен Гокінг, голова корпорації «Майкрософт» Білл Гейтс у свій час застерігали від розробки штучного інтелекту, а, наприклад, Марк Цукерберг, програміст і засновник мережі Фейсбук, навпаки бачить користь для всього людства у застосуванні ШІ.

Від самого початку ШІ перебуває під пильною увагою науковців та громадськості. Дехто застерігає, що існує загроза: машини стануть високорозвиненими, а люди не зможуть за ними встигати, і ті почнуть розвиватися самі по собі. Інші вважають, що використання ШІ зменшує роль навчання у житті сучасної людини, тому що тепер частина «розумової роботи» може бути виконана за неї, а для цього немає необхідності здобувати теоретичні знання.

І тому ще більш актуальною стає дискусія, чи необхідно знайомити школярів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі, або достатньо лише знати певні формули та теореми та вміти їх застосовувати для розв'язування простих задач, а все інше зможе зробити ШІ. Це не нова проблема. Навіть деякий час і відомі методисти (зокрема, Г.П. Бевз) притримувались думки, що немає необхідності вводити аксіоми на першому

етапі вивчення геометрії, що аксіоматика в явному вигляді спочатку може бути відсутньою. У таких підручниках аксіоми «з'являються» поступово, коли «виникає необхідність», акцент робиться на наочно-інтуїтивні уявлення учнів. Цей підхід пропонують ті, хто вважає головною метою вивчення геометрії її практичне застосування.

Аксіоматика може бути введена на початку вивчення геометрії, тоді реалізується дедуктивний виклад курсу геометрії. О. В. Погорелов, С. М. Чашечников, І. Ф. Тесленко були прихильниками такого підходу, тому що найважливішою метою вивчення геометрії вважали розвиток в учнів логічного мислення, вміння доводити, обґрунтовувати. Можна припустити, що основну мету вивчення геометрії прихильники цього підходу вбачають у тому, щоб навчити учнів, студентів насамперед логічно мислити через навчання їх доводити, обґрунтовувати свої висновки, розмірковувати.

Здатність висловлювати свої думки послідовно, обґрунтовано важлива для кожної людини. Перші ж уроки математики можуть стати для учня школою логічного мислення. Вчитель математики привчає школярів обґрунтовано доводити або спростовувати твердження, навчає їх вибудовувати послідовний ланцюг міркувань.

Геометрія - єдина шкільна дисципліна, яка будується на дедуктивно-аксіоматичній основі і тому пред'являє підвищені вимоги до рівня розвитку логічного мислення школярів. В основі дедуктивно-аксіоматичного викладу геометрії лежить аксіоматичний метод.

Вимоги:

- 1) виділяється кілька основних (неозначуваних, базових) понять;
- 2) всі інші поняття (будь-яке поняття, що не є базовим) вводяться за допомогою означень. Означення формулюються через основні базові поняття, або через ті поняття, для яких означення вже сформульовані;

- 3) властивості неозначуваних понять формулюють / описують за допомогою певного набору тверджень – системи аксіом. Ці властивості не доводяться і називаються аксіомами;

4) якщо твердження не є аксіомою, то його необхідно доводити. Такі твердження називають теоремами. Доводяться вони з використанням дедуктивних міркувань, в яких опора відбувається на аксіоми, означення, вже доведені теореми.

Засвоєння учнями систематичних курсів планіметрії та стереометрії викликає труднощі у школярів, і важливою причиною є те, що геометрія - єдина шкільна дисципліна, яка будується на дедуктивно-аксіоматичній основі, а тому висуваються достатньо високі вимоги до рівня розвитку логічного мислення учнів. Також високими є вимоги до рівня абстрактного мислення та просторового мислення школярів.

Дискусії ведуться щодо того, на якому етапі доцільно розпочинати знайомство учнів з аксіоматичним методом та що є умовами успішного навчання.

Найпоширеніші точки зору:

- зробити систематичний курс аксіоматичним, чітко відокремивши його від пропедевтичного, що характеризується широким використанням досвіду та заснованої на ньому інтуїції;
- на жодному етапі навчання не відокремлювати логіку від інтуїції, а правильно поєднувати їх по-різному на різних ступенях навчання;
- побудувати в аксіоматичному стилі лише невеликий фрагмент теорії у старших класах, щоб на цьому матеріалі знайомити учнів із сучасним аксіоматичним методом, а весь курс будувати, не відокремлюючи логіку від інтуїції.

Притримуємось точки зору, що необхідно знайомити учнів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі, але залучаючи інтуїцію та спираючись на реальний досвід учнів.

2.2. Психолого-педагогічні особливості учнів у контексті проблеми

До пізнавальних психічних процесів належать психічні процеси, пов'язані з сприйняттям та переробкою відомостей, які стають інформацією.

Психологи зазначають такі особливості учнів підліткового та юнацького віку [13; 14; 15; 27; 28; 30; 45; 49; 52; 53].

Розвиток уваги. Підлітковий вік (11-14 років) - стає більш організованою; керованою. Отже, *учні можуть зосереджуватись на сприйманні формулювань аксіом.*

Юнацький вік (14-18 років). Володіння прийомами переключення уваги; легке зосередження на предметі діяльності; удосконалення спостережливості; переважання довільної уваги. *Учні можуть «переключатися» з роботи на площині на роботу у просторі.*

Пам'ять. Юнацький вік (14-18 років). Учні мають довільну, керовану пам'ять; збільшується обсяг осмисленого запам'ятовування. Це важливо для запам'ятовування як аксіом, так і наслідків з них (саме на логічній основі). У підлітковому віці механічна пам'ять поступово поступається місцем логічної пам'яті; з'являється вміння узагальнювати та систематизувати матеріал; спостерігається інтенсивний розвиток довільної логічної пам'яті.

Розвиток мислення. Мислення є найвищим пізнавальним психічним процесом. Сутність даного процесу полягає в породженні нового знання на основі творчого відображення і перетворення людиною дійсності.

Понятійне мислення (абстрактно-логічне мислення). Мислення, де використовуються визначені поняття, використання знань, які виражені у формі понять, суджень умовиводів. *Знання формулювань аксіом.*

Образне мислення. Використовуються образи, які зберігаються у пам'яті чи відтворюються уявою. В ході розв'язання інтелектуальних задач, відповідні образи подумки перетворюються так, що, оперуючи ними, знаходять розв'язок задачі. *Уявне оперування поняттями «точка», «пряма», «площина».*

Понятійне і образне мислення взаємодоповнюють одне одне.

Наочно-образне мислення є домінуючою формою у дітей дошкільного і молодшого шкільного віку, але у сучасних школярів іноді переважає і у більш старшому віці.

Сутність наочно-дієвого мислення в практичній перетворюючій діяльності, яка здійснюється з реальними предметами. Створення об'ємних моделей – ілюстрацій аксіом.

Теоретичне мислення вважається більш досконалим, ніж практичне, а понятійне представляє собою більш високий рівень розвитку, ніж образне. *Нажаль, у сучасних школярів порівняно із школярами, що навчалися років двадцять тому, розвинено гірше.*

У підлітковому віці розвивається самостійність, критичність мислення; вміння узагальнювати та логічно мислити, з'являється здатність до абстрактного мислення. У юнацькому віці з'являється здатність до розуміння абстрактного матеріалу, доцільність інтелектуальної діяльності.

Розвиток мовлення. Підлітковий вік - активне розширення словника, у юнацькому віці більш багата лексика, іноді кращий розвиток письмової мови, ніж усної.

Але реальність часто є іншими, і рівні розвитку уваги, пам'яті, мислення, мовлення учнів одного віку значно відрізняються. Сучасні умови (дистанційне навчання, менше можливості реального спілкування з вчителями та однолітками, менша увага читанню, те, що учні менше пишуть «від руки» та інше) накладають на психолого-педагогічні особливості учнів свої вимоги.

Ознайомлення з логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі вимагає працелюбності, відповідальності, самостійності мислення. А вчителі відмічають, що на розвиток цих якостей негативно впливає дистанційне навчання. Існує серйозна проблема зниженої або навіть відсутньої мотивації до вивчення математики.

Кількісні зміни у теоретичному мисленні школяра-підлітка проявляються в тому, що підліток розв'язує інтелектуальні задачі значно швидше, легше та ефективніше, ніж дитина молодшого шкільного віку.

Якісні зміни перш за все характеризуються тим, що здійснюється перехід від конкретних до все більш абстрактних понять, а зміст понять збагачується, встановлюються зв'язки між ними, відділяється суттєве від несуттєвого.

Відбувається розвиток розумових операцій (аналіз, синтез, здатність узагальнювати, розвивається здатність використовувати індукцію та дедукцію).

У підлітковому віці у дитини в процесі шкільного навчання продовжує розвиватись теоретичне мислення, відбувається оволодіння формально-логічними операціями, формується здатність абстрагуватись від конкретного, міркувати у словесному плані, розвивається логічне мислення. Поступово окремі розумові операції перетворюються в єдину цілісну структуру.

У старшокласників розвиток пізнавальних процесів має досягати рівня, при якому пізнавальні процеси стають більш досконалими і гнучкими, відмічається прогресуючий розвиток теоретичного мислення. Учні засвоюють наукові поняття, навчаються користуватись ними в процесі розв'язання різноманітних завдань. У них має бути сформоване теоретичне (словесно-логічне) мислення.

Отже, у підлітковому і ранньому юнацькому віці завершується формування когнітивних процесів, і перш за все мислення. Інтелект в своїх вищих проявах стає мовленнєвим, а мова інтелектуалізованою. Виникає повноцінне теоретичне мислення.

Відбувається активний процес формування наукових понять, остаточні форми і розумові дії і операції з поняттями.

Отже, учні цих вікових категорій мають бути готові до сприймання логічної побудови геометрії на аксіоматичній основі.

2.3. Аналіз підручників геометрії для старшої школи у контексті дослідження

Ознайомлення учнів з логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі є проблемою, яка потребує дослідження, починаючи з пропедевтичного курсу геометрії, але обсяг кваліфікаційної роботи не дозволяє розглядати питання так широко. Тому у роботі зосередимся саме на навчанні геометрії у старшій школі.

Протягом трьох років учні, вивчаючи планіметрію, працювали у двовимірному просторі, оволоділи знаннями щодо властивостей фігур та відповідних метричних відношень, навчалися будувати плоскі фігури за допомогою креслярських інструментів, доводити, обґрунтовувати кроки розв'язування. Їх вміння – результати цілеспрямованої та наполегливої спільної праці вчителя та учнів.

Учні 10-11 класів навчаються за програмами, розміщеними на сайті МОН України [42]. Розглянемо підручники геометрії для 10 класу різних авторів (різних авторських колективів) щодо подання в них систем аксіом.

При вивченні геометричного матеріалу у старшій школі відбувається перехід з двовимірного простору у тривимірний. Цей перехід потребує розвинених просторового, абстрактного, логічного мислення. У тривимірному просторі площа стає самостійною фігурою та одночасно носієм всіх плоских фігур з численними їх властивостями. Не для кожного учня просто уявити собі образ площини, ще важче уявити можливе розміщення двох, трьох і більше площин в цьому просторі, ще складніше побачити розміщення на цих площинах вже відомих плоских фігур [8; 9; 10; 40; 41; 46; 48; 53; 54; 55].

Вчителю необхідно пам'ятати, що цей процес просторової переорієнтації у розумі кожного учня є важким, за допомогою продуманої методики максимально допомогти йому у розвитку нових просторових уявлень. Нечіткість, розпливчастість просторових уявлень нерідко є

причиною нерозуміння матеріалу стереометрії. Бажано використання моделей, стереометричного ящика та предметів із реального життя.

Важливим є органічне поєднання просторових уявлень про властивості просторових фігур з суворо логічним обґрунтуванням їх існування, їх властивостей, а це можливо, якщо систематично поєднувати реальну наочність та виконувати логічне обґрунтування на основі використання аксіом.

Основні властивості площин у просторі представлені аксіомами групи С, а ознайомленню з ними передувало повторення аксіом планіметрії. Потім розглядаються наслідки з аксіом стереометрії. Учні легко помічають аналогію у матеріалі планіметрії та стереометрії, але важливо також бачити відмінність у тлумаченнях та уявленнях таких образів, як «точка на площині» та «точка у просторі», «пряма на площині» та «пряма у просторі». Ці поняття у тривимірному просторі «перероджуються в нові образи».

І тут важливу роль грає те, як побудована система аксіом у підручнику, з яким працюють учні [52; 53; 54].

У підручнику авторського колективу Мерзляка А. Г., Номіровського Д. А., Полонського В. Б., Якіра М. С. [20] аксіоми сформульовані так.

Аксіома A_1 . У будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії.

Аксіома A_2 . Через будь-які три точки простору, що не лежать на одній прямій, проходить площина і до того тільки одна.

Аксіома A_3 . Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

Аксіома A_4 . Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.

У підручнику авторського колективу Г. П. Бевза, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірової, В. М. Владіміров [4; 5; 6; 7] аксіоми сформульовані так.

Аксіома C_1 . У просторі існує (принаймні одна) площина і точка, що не лежить у цій площині.

Аксіома C_2 . Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того тільки одну.

Аксіома C_3 . Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма належить цій площині.

Аксіома C_4 . Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Істер О.С. пропонує такий список аксіом [19]:

C_1 . Яка б не була площина, існують точки, які їй належать, і які їй не належать.

C_2 . Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

C_3 . Якщо дві різні площини мають одну спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

C_4 . Через будь – які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

У підручнику авторів Бурда М.І., Колесник Т.В., Мальований Ю.І., Тарасенкова Н.А. [12] аксіоми групи C називають «аксіоми стереометрії» і формулюють так:

1. Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній.

2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

3. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Важливо, що у підручнику Мерзляка А. Г. та інших є уточнення, що у будь-якій площині простору виконуються всі аксіоми планіметрії. Ми згодні з позицією Чашечникової О.С., що тоді чітко зрозуміло: аксіоми стереометрії включають в себе не лише аксіоми групи C , але й аксіоми планіметрії [50; 53;

54; 55]. І також згодні з нею, що дане формулювання не є аксіомою, а є важливим уточненням.

У всіх з розглянутих підручників площина задається через три точки, що не лежать на одній прямій. Отже, всі інші задання (через пряму і точку, що їй не належать; через дві прямі, що перетинаються; через дві паралельні прямі) вважаються наслідками і мають бути доведені (це питання глибоко досліджено Чашечниковою О.С. (2011) у [53; 54]).

Аксіома про перетин **двох різних** площин сформульована коректно у підручнику О. С. Істера [19; 32].

Аксіома 1 у підручнику авторського колективу Бурди М.І. та інші сформульована більш коректно [12], ніж у підручнику Г.П.Бевза та інших [5], і є, на наш погляд, обов'язковою.

На наш погляд, систему аксіом групи С доцільно представити так:

1. Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що не належать їй.
2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
3. Якщо дві **різні** точки прямої належать площині, то й кожна точка цієї прямої належить цій площині.
4. Якщо дві **різні** площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Важливо, щоб у підручниках було достатньо завдань як на застосування аксіом, так і на усвідомлення їх сутності.

Вважаємо, що необхідно доповнювати завдання з основного підручника завданнями з інших, враховуючи відмінності у системах аксіом.

Ознайомлюючи школярів із аксіомами стереометрії, необхідно використовувати різноманітні наочність для конкретизації нових відомостей (моделі просторових фігур, таблиці, схеми) та ІКТ для ілюстрації, супроводжувати пояснення діями з предметами і відповідними записами [23; 26; 37; 38]. При цьому важливо використати наочний посібник

своєчасно, ілюструючи суть пояснення, залучаючи до роботи з посібником і пояснення самих учнів [39; 41; 53; 54; 55].

Рисунки і записи на дошці треба виконувати грамотно, естетично. Необхідно організовувати роботу з наочними посібниками так, щоб учні самі оперували ними і супроводжували свої дії відповідними поясненнями, тоді ефективність засвоєння матеріалу буде вище.

2.4. Перші уроки стереометрії

У процесі створення конспектів уроків будемо використовувати поради, що розроблені Чашечниковою О.С. (2011) у [53; 54; 55] щодо реалізації диференційованого підходу в процесі проведення перших уроків планіметрії та стереометрії.

Ольга Серафимівна відмічає, що аналіз досвіду роботи в школі свідчить про те, що доцільно компактно представити всю систему аксіом на початку вивчення курсу, причому більш свідомо сприймаються і запам'ятовуються саме ті аксіоми, які формулюються у конструктивній формі (відповідає віковим особливостям учнів).

Формулювання аксіом мають водночас задовольняти й вимогу науковості, й вимогу доступності. Так полегшується доведення більшості теорем і, крім того, «знімаються» запитання учнів про те, чому деякі «зрозумілі твердження» приймаються без доведення, а інші, також «зрозумілі твердження», необхідно доводити. Такий підхід, строгий облік введених у систематичному курсі основних понять і основних властивостей сприяє тому, щоб учні не намагалися використовувати в ході доведень всі відомі їм відомості (це також зазначено у [48]).

У роботі Чашечникової О.С. [53; 54] відмічається, що, будуючи шкільний курс геометрії, слід обирати найбільш доцільну з врахуванням вікових особливостей учнів схему подання матеріалу. Аксіомами повинні обиратися твердження, істинність яких відома учням на основі їх практичного досвіду та знань з пропедевтичного курсу геометрії. Система

аксіом повинна бути надлишковою та настільки «сильною», щоб кількість «очевидних» теорем була найменшою. Інакше знижується інтерес школярів до вивчення предмету через необхідність доводити те, що, на їх погляд, і так очевидно (приклад - третя ознака рівності трикутників).

У роботі О.С. Чашечникової [53; 54] вказано, що з метою розвитку здатності відхилятися від традиційних схем мислення доцільно запропонувати учням довести, що дві паралельні прямі також задають єдину площину. Сприяє формуванню спроможності швидко висувати ідеї, продукувати задум; тактика, коли повному та обґрунтованому доведенню передують виконання схем-ілюстрацій до доведення, які водночас можуть стати підказкою для учнів з недостатньо високим рівнем розвитку творчого мислення.

Формуванню просторової уяви в процесі вивчення теми сприяє виховання культури виконання графічних зображень. У ході вивчення планіметрії деякою мірою згладжуються неточності у зображенні прямих, що перетинаються, на рисунку 2.1 порівняно з рисунком 2.2 (відмічено у [53; 54]).

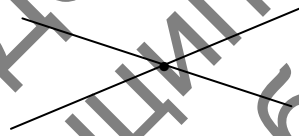


Рис. 2.1. Прямі перетинаються

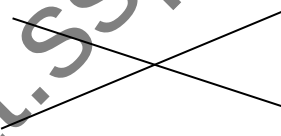


Рис. 2.2. Мимобіжні прямі

У [53; 54] показано, що зображення у стереометрії вимагають більшої точності у даному випадку. Рисунок чітко ілюструє, що прямі перетинаються (рис. 2.3). Рисунок може бути зображенням двох мимобіжних прямих: спостерігач «знаходиться над площинами», яким належать дані прямі (рис. 2.4).

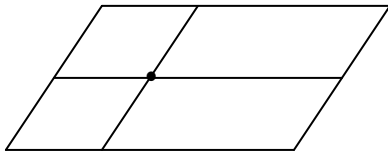


Рис. 2.3 Прямі, що перетинаються

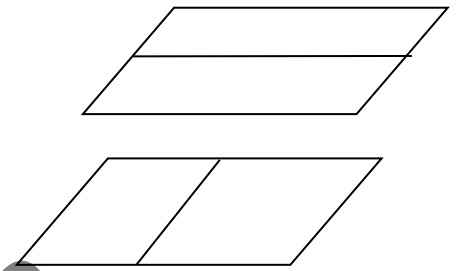


Рис.2.4 Мимобіжні прямі

Для розробки уроку скористалися матеріалами з дисертації О.С.Чашечникової [53; 54].

2.4.1. Урок пояснення нового матеріалу з теми «Аксіоми стереометрії»

Тема уроку: «Аксіоми стереометрії»

Цілі уроку:

Дидактична -- ознайомити учнів з аксіомами групи С.

Розвивальна — розвивати абстрактне, просторове та логічне мислення учнів.

Виховна — виховувати уважність та працелюбність.

Обладнання: мультимедійна дошка, планшети, таблиця, презентація, креслярські інструменти, кольорова крейда.

Тип уроку: урок пояснення нового матеріалу.

Хід уроку

I. Організаційний момент. Перевірка готовності учнів до уроку (наявність креслярських інструментів).

II. Мотивація навчальної діяльності учнів. Здатність висловлювати свої думки послідовно, обгрунтовано важлива для кожної людини. Вивчення геометрії - це школа логічного мислення. Відомими є слова видатного вченого-геометра О.В. Погорелова про те, що одне з основних завдань вивчення геометрії у школі – навчитись логічно мислити, аргументувати свої твердження, доводити. Не всі з вас будуть математиками, але не знайдеться жоден, якому не прийдеться міркувати, аналізувати, доводити.

III. Актуалізація теоретичних знань (фронтальне опитування з використанням презентації).

Точки позначають великими латинськими буквами $A, B, C, D, E, F, K, L, M, N, O, P, R, S, T$.

Прямі позначають малими латинськими буквами (a, b, c, d, m, n, p) або двома великими латинськими буквами (AB, KM, FP, DC).

Методичний коментар. Повторюються аксіоми планіметрії, що відповідають підручнику, за яким учні будуть працювати у 10 класі. Якщо до цього учні навчалися за підручниками інших авторських колективів, то необхідно розглянути системи аксіом у всіх цих підручниках.

IV. Пояснення нового матеріалу.

Планіметрія – це розділ геометрії, в якому вивчаються фігури на площині.

Стереометрія – це розділ геометрії, в якому вивчаються фігури в просторі.

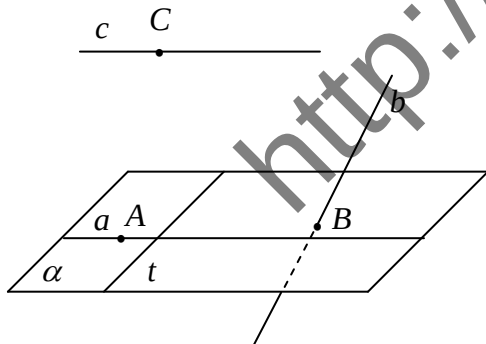
Основні неозначувані поняття геометрії **точка, пряма, площина**.

Для них ми не надаємо означень. Але для будь-яких інших об'єктів означення подається обов'язково.

На рисунках площини зображують частіше у вигляді паралелограма. Площини позначають грецькими буквами: $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \omega$.

Методичний коментар. Створюємо опорний конспект (за основу беремо [53; 54]).

I. Основні об'єкти: точка, пряма, площина.



A, B, C – точки

a, b, c, t – прямі

α – площина

Методичний коментар. Важливо навчити учнів грамотно використовувати символіку.

Для цього важливо заповнювати геометричний довідник.

II. Основні відношення

Словесна інтерпретація	Інтерпретація символікою
Точка належить прямій	$A \in t, K \in t, K \in a, N \in b$
Точка належить площині	$A \in \alpha, D \in \alpha, K \in \alpha, N \in \alpha$
Пряма належить площині	$a \subset \alpha, t \subset \alpha$
Дві прямі перетинаються (дві прямі перетинаються в точці)	$a \cap t \ (a \cap t = K)$
Пряма і площина перетинаються (пряма і площина перетинаються в точці)	$b \cap \alpha \ (b \cap \alpha = N)$
Дві площини перетинаються (дві площини перетинаються в точці)	$\beta \cap \alpha \ (\beta \cap \alpha = c)$

Точка і пряма – це основні фігури планіметрії, тому в стереометрії справедливі всі аксіоми планіметрії. Площина разом з точкою та прямою є основною фігурою у стереометрії.

Розміщення прямих у просторі:

- 1) перетинаються (мають одну спільну точку, існує площина, що містить обидві ці прямі);
- 2) паралельні – не перетинаються на площині, існує площина, що містить обидві ці прямі;
- 3) мимобіжні - прямі, які лежать у різних площинах і не перетинаються (не існує площини, що містить обидві ці прямі).

Частковий випадок прямих, що перетинаються, - прямі, що перетинаються під прямим кутом, взаємно перпендикулярні прямі.

Якщо одна пряма лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то такі дві прямі мимобіжні.

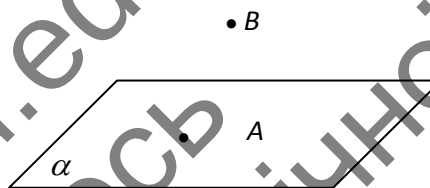
Запитання для учнів: Якщо одна пряма лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину в точці, що належить першій прямій, то що можна сказати про ці прямі?

Можливі відповіді: 1) дані прямі перетинаються; 2) дані прямі задають єдину площину.

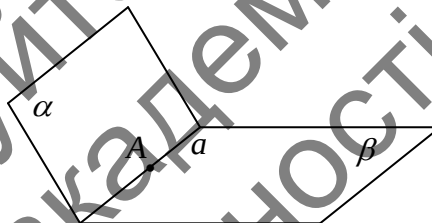
Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні між собою.

III. Основні властивості (аксіоми за О.В. Погорєловим)

$C_1 \quad \forall \alpha \quad \exists A \in \alpha, \exists B \notin \alpha.$



$C_2 \quad \begin{matrix} A \in \alpha, \\ A \in \beta \end{matrix} \Rightarrow \alpha \cap \beta = a, A \in a.$



$C_3 \quad \begin{matrix} C \in a, \\ C \in b \end{matrix} \Rightarrow \exists \alpha (a \subset \alpha, b \subset \alpha)$

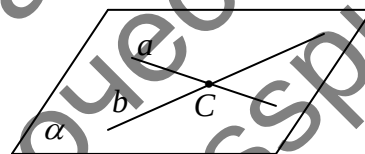
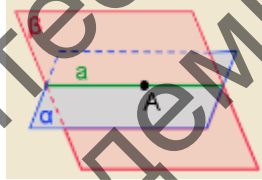
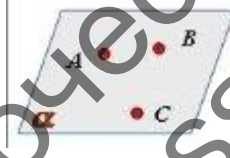
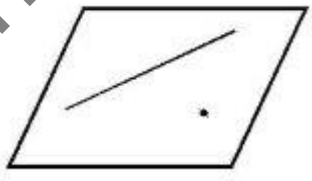
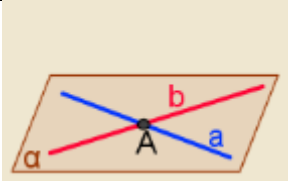


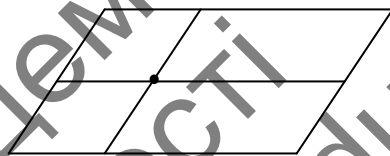
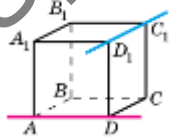
Рис. Фрагмент опорного конспекту

Учням пропонується заповнити таблицю (проілюструвати твердження).

Таблиця 2.1

1. Основні поняття, аксіоми стереометрії та найпростіші наслідки із них			
1.1	Стереометрія – це розділ геометрії, в якому вивчаються властивості фігур у просторі.		
	Словесний опис	Ілюстрація	Символи
1.2	Основні фігури стереометрії: точка, пряма,	Самостійно зробити ілюстрацію	A ; a ;

	площина.		α .
1.3	C_1 . Яка б не була площина, існують точки, які їй належать, і які їй не належать.	Самостійно зробити ілюстрацію	Записати символами
1.4	C_2 . Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.	Самостійно зробити ілюстрацію	$A \in a,$ $B \in a,$ $A \in \alpha,$ $B \in \alpha,$ $a \subset \alpha.$
1.5	C_3 . Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.		Записати символами
1.6	C_4 . Будь – які три точки, що не лежать на одній прямій, задають площину і до того ж тільки одну.		Записати символами
2. Найпростіші наслідки з аксіом стереометрії			
2.1	Наслідок 1. Пряма і точка, що не лежить на ній, задають площину, і до того ж тільки одну.		Записати символами
2.2	Наслідок 2. Дві прямі, що перетинаються, задають площину, і до того ж тільки одну.		Записати символами

2.3.	Наслідок 3. Дві паралельні прямі задають площину і до того ж тільки одну.		Записати символами
2.4	Площину можна задати однозначно: 1) трьома точками, що не лежать на одній прямій; 2) прямою і точкою, яка їй не належить; 3) двома прямими, що перетинаються; 4) двома паралельними прямими.		Записати символами
3. Взаємне розміщення прямих у просторі			
3.10	Якщо дві прямі мають лише одну спільну точку, то кажуть, що вони перетинаються .	$a \cap b = A$ 	
3.11	Прямі, які лежать в одній площині і не перетинаються, називаються паралельними .	$a \parallel b$ 	
3.12	Прямі, які не лежать в одній площині, називаються мимобіжними .	 $a \nparallel b$	

Пряма може мати з площиною тільки одну спільну точку – пряма перетинає площину.

Якщо знаємо, що у прямої і площини є дві спільні точки, то ця пряма повністю належить площині.

Пряма може не мати з площиною жодної спільної точки – пряма і площина паралельні.

IV. Підсумок уроку.

Демонструється слайд (формулювання аксіом, записи символікою, відповідні рисунки).

V. Домашнє завдання

Вивчити формулювання аксіом групи С напам'ять.

Виконати завдання на платформі <https://justclass.com.ua>

2.4.2. Урок закріплення матеріалу з теми «Аксіоми стереометрії»

Тема уроку: «Аксіоми стереометрії»

Цілі уроку:

Дидактична – закріпити розуміння учнями аксіом групи С.

Розвивальна – розвивати абстрактне, просторове та логічне мислення учнів.

Виховна – виховувати уважність та працелюбність.

Обладнання: мультимедійна дошка, планшети, таблиця, презентація, креслярські інструменти, кольорова крейда.

Тип уроку: урок закріплення нового матеріалу.

Хід уроку

I. Організаційний момент. Повідомлення теми та мети уроку.
Перевірка готовності учнів до уроку (наявність креслярських інструментів).

II. Закріплення нового матеріалу.

Завдання 1 (усне, фронтальне)

1. Назвіть основні неозначувані об'єкти.
2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то
3. Через пряму і точку, що не належить
4. Через три точки, які _____, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
5. Скільки площин можна задати, якщо задані точки А, В, С? Відповідь обґрунтуйте.

Відповідь: якщо точки А, В, С не належать одній прямій – одн.; якщо точки А, В, С належать одній прямій, то безліч.

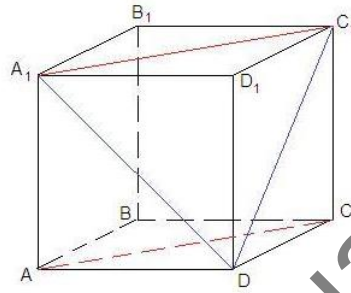


Рис. 2.5

Завдання 2. На рисунку – куб (рис. 2.5).

- 1) які точки належать площині $(C B B_1)$;
- 2) які точки не належать площині $(A B B_1)$;
- 3) які прямі належать площині $(C B B_1)$;
- 4) які прямі паралельні площині $(A B B_1)$;
- 5) назвіть прямі, що перетинають пряму DC_1 ;
- 6) назвіть прямі, що паралельні прямій BB_1 ;
- 7) які прямі на рисунку є мимобіжними?

Завдання 3 (усне, фронтальне).

- 1) Як можна однозначно задати площину?
- 2) Скільки точок однозначно визначають пряму в просторі?
- 3) Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?
- 4) Скільки площин можна провести через одну пряму?
- 5) Скільки площин можна провести через пряму і точку?
- 6) Як розміщені пряма a і точка A , якщо через них можна провести дві різні площини?
- 7) Знаємо, що дві прямі мають дві спільні точки. Висновок?
- 8) Знаємо, що дві площини мають три спільні точки. Висновок?
- 9) П'ять точок не лежать в одній площині. Яка найбільша кількість цих точок може лежати на одній прямій?

Завдання 4. Заповнити таблицю.

а) дві площини, які містять DE , пряму EF .	Рішення:
б) пряму, по якій перетинаються площини DEF і SBC ; площини FDE і SAC .	Рішення:
в) дві площини, які перетинає пряма SB ; пряма AC .	Рішення:

Завдання 5. Користуючись рисунком (рис. 2.6), визначте взаємне розміщення прямих і заповніть таблицю.

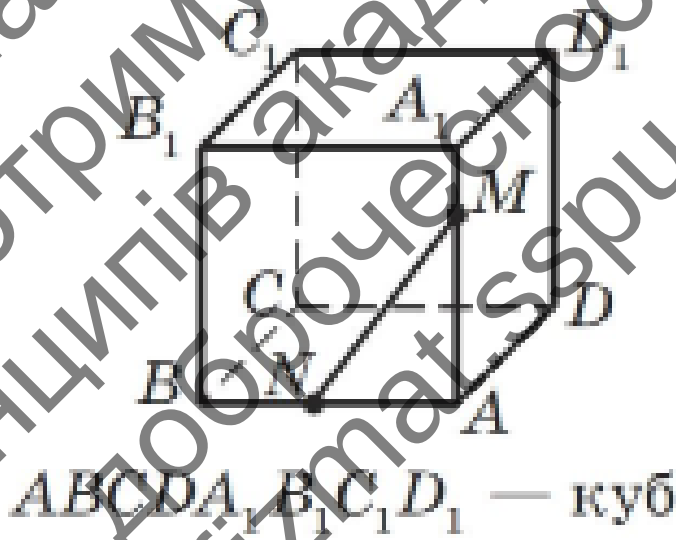


Рис. 2.6

Прямі	AB	BB_1		A_1D_1
MN				-
C_1A_1				-
C_1B_1				-

Завдання 6. Дано пряму l і точку A поза нею. Доведіть, що пряма s , яка проходить через точку A і перетинає пряму l , лежить із ними в одній площині.

Завдання 7. Прямі AK і BC не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AC і BK не лежать в одній площині.

Завдання 8. Чи правильно що:

Якщо дві прямі не лежать в одній площині, то вони мимобіжні.

Якщо дві прямі не перетинаються, то вони паралельні.

Дві прямі завжди лежать в одній площині.

Якщо пряма у просторі перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона обов'язково перетинає другу паралельну пряму.

Відповідь обґрунтуйте.

Завдання 9. Скласти схему, що ілюструє взаємне розміщення двох прямих у просторі (можливий варіант – на рисунку 2.7).



Рис. 2.7

Завдання 10. Прямі AC та KM мають одну спільну точку. Як можуть бути розташовані прямі KM і TH , якщо прямі AC та TH :

- а) перетинаються;
- б) паралельні;

в) мимобіжні?

Завдання 11. Прямі AC та KM паралельні. Яке взаємне розміщення прямих KM та TH , якщо прямі AC та TH :

- а) паралельні;
- б) перетинаються;
- в) мимобіжні?

Завдання 12. Прямі AC та KM мимобіжні. Що можна сказати про розташування прямих KM та TH , якщо прямі AC та TH :

- а) паралельні;
- б) перетинаються;
- в) мимобіжні?

IV. Підсумок уроку.

Демонструється слайд (формулювання аксіом, записи символікою, відповідні рисунки).

V. Домашнє завдання

Виконати завдання на платформі <https://justclass.com.ua>

Виготовити модель, що підходить для ілюстрації формулювань аксіом.

Методичний коментар. Онлайн-курси, використання презентацій, роіки на youtube сприяють ефективному вивченню навчального матеріалу.

Висновки до другого розділу.

В основі дедуктивно-аксіоматичного викладу геометрії лежить аксіоматичний метод.

Вимоги:

- 1) виділяється кілька основних (неозначуваних, базових) понять;
- 2) всі інші поняття (будь-яке поняття, що не є базовим) вводяться за допомогою означень. Означення формулюються через основні базові поняття, або через ті поняття, для яких означення вже сформульовані;
- 3) властивості неозначуваних понять формулюють / описують за допомогою певного набору тверджень – системи аксіом. Ці властивості не доводяться і називаються аксіомами;

4) якщо твердження не є аксіомою, то його необхідно доводити. Такі твердження називають теоремами. Доводяться вони з використанням дедуктивних міркувань, в яких опора відбувається на аксіоми, означення, вже доведені теореми.

У старшокласників розвиток пізнавальних процесів має досягати рівня, при якому пізнавальні процеси стають більш досконалішими і гнучкими, відмічається прогресуючий розвиток теоретичного мислення. Учні засвоюють наукові поняття, навчаються користуватись ними в процесі розв'язування різноманітних завдань. У них має бути сформоване теоретичне (словесно-логічне) мислення.

Отже, у підлітковому і ранньому юнацькому віці завершується формування когнітивних процесів, і перш за все мислення. Інтелект в своїх вищих проявах стає мовленнєвим, а мова інтелектуалізованою. Виникає повноцінне теоретичне мислення.

Відбувається активний процес формування наукових понять, остаточні форми і розумові дії і операції з поняттями.

Отже, учні цих вікових категорій мають бути готові до сприймання логічної побудови геометрії на аксіоматичній основі.

Засвоєння учнями систематичних курсів планіметрії та стереометрії викликає труднощі у школярів, і важливою причиною є те, що геометрія - єдина шкільна дисципліна, яка будується на дедуктивно-аксіоматичній основі, а тому висуваються достатньо високи вимоги до рівня розвитку логічного мислення учнів. Також високими є вимоги до рівня абстрактного мислення та просторового мислення.

На наш погляд, систему аксіом групи С доцільно представити так:

1. Яка б не була площа, існують точки, що належать цій площині, і точки, що належать їй.

2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.

3. Якщо дві **різні** точки прямої належать площині, то й кожна точка цієї прямої належить цій площині.

4. Якщо дві **різні** площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Важливо, щоб у підручниках було достатньо завдань як на застосування аксіом, так і на усвідомлення їх сутності.

Вважаємо, що необхідно доповнювати завдання з основного підручника завданнями з інших, враховуючи відмінності у системах аксіом.

Ознайомлюючи школярів із аксіомами стереометрії, необхідно використовувати різноманітні наочність для конкретизації нових відомостей (моделі просторових фігур, таблиці, схеми) та ІКТ для ілюстрації, супроводжувати пояснення діями з предметами і відповідними записами. При цьому важливо використати наочний посібник своєчасно, ілюструючи суть пояснення, залучаючи до роботи з посібником і пояснення самих учнів.

Онлайн-курси, використання презентацій, роіки на *youtube* сприяють ефективному вивченню навчального матеріалу.

ВИСНОВКИ

Праця Евкліда була першою в історії людства науковою книгою: в ній геометрія була представлена як аксіоматична теорія. У навчанні геометрії знайшов відображення історичний процес формування аксіоматичного методу взагалі, який в основному проходить на полі геометрії. Заслуга в цьому належить видатній праці Евкліда «Начала», яка більше як на двадцять століть встановила не тільки канони геометричної науки, але і канони її викладання. Наступний етап – етап основ геометрії Д. Гільберта. На початку XX сторіччя – етап формально-аксіоматичного обґрунтування.

Аксіоматичний підхід - основний інструментарій обґрунтування теорії.

Найважливіше значення аксіоматичного підходу - він надає найцінніший інструментарій наукового дослідження та виявлення нових закономірностей. Аксіоматичний метод широко застосовується у математиці, його розуміння позитивно впливає на розвиток мислення школярів. Засвоєння учнями систематичних курсів планіметрії та стереометрії викликає труднощі у школярів, і одна з причин те, що геометрія - єдина шкільна дисципліна, яка будується на дедуктивно-аксіоматичній основі, а тому висуваються достатньо високі вимоги до рівня розвитку логічного мислення учнів. Високими є вимоги до рівня абстрактного мислення та просторового мислення.

Проаналізувавши специфіку підходів до побудови системи аксіом у шкільному курсі геометрії та проаналізувавши підручники геометрії, зазначимо: в основі дедуктивно-аксіоматичного викладу геометрії лежить аксіоматичний метод.

Вимоги:

- 1) виділяється кілька основних (неозначуваних, базових) понять;
- 2) всі інші поняття (будь-яке поняття, що не є базовим) вводяться за допомогою означень. Означення формулюються через основні базові поняття, або через ті поняття, для яких означення вже сформульовані;

3) властивості неозначуваних понять формують / описують за допомогою певного набору тверджень – системи аксіом. Ці властивості не доводяться і називаються аксіомами;

4) якщо твердження не є аксіомою, то його необхідно доводити. Такі твердження називають теоремами. Доводяться вони з використанням дедуктивних міркувань, в яких опора відбувається на аксіоми, означення, вже доведені теореми.

На основі психолого-педагогічних особливостей учнів та аналізу підручників геометрії зазначимо: систему аксіом групи С доцільно представити так:

1. Якщо α не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що належать їй.
2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
3. Якщо дві **різні** точки прямої належать площині, то й кожна точка цієї прямої належить цій площині.
4. Якщо дві **різні** площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Нами розроблені конспекти перших уроків стереометрії.

Апробація розроблених матеріалів в ході педагогічної практики підтверджує їх ефективність.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. <https://zakon.rada.gov.ua>.
2. Концепція розвитку дистанційної освіти в Україні: наказ Міністерства освіти і науки України від 20 грудня 2000р. [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <http://uiite.kpi.ua/2019/06/03/1598/>
3. Бевз В. Г. Історія математики. — Х.: Вид. гр. «Основа», 2006. — 176 с.
4. Бевз Г. П. Геометрія 10. Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів: профільний рівень / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров. — К. : Генеза, 2010. — 388 с.
5. Бевз Г.П. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту. Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. Київ, «Освіта», 2018 .- 287 с.
6. Бевз Г.П. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти/ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. Київ: Освіта, 2018. 287 с.
7. Бевз Г.П. Математика. Алгебра і початки аналізу та геометрія. Рівень стандарту: підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти/ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. Київ: Освіта, 2019. 271 с.
8. Бевз В. Г. Методические основы построения системы стереометрических упражнений : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Валентина Григорьевна Бевз. — К., 1989. —197 с.
9. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. / Г. П. Бевз. — К. : Вища шк., 1977. — 376 с.
10. Бевз Г. П. Методика розв'язування стереометричних задач : посіб. для вчителя. — К. : Рад. шк., 1988. — 192 с.
11. Бурда М.І. Геометрія: підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів / М.І. Бурда, Н.А. Тарасенкова. — К: Зодіак-Еко, 2007. — 208 с.

12. Бурда М.І., Колесник Т.В., Мальований Ю.І., Тарасенкова Н.А. Математика 10: Рівень стандарт. – К.: Зодіак-Еко, 2010. – 293 с.: іл.
13. Варій М.Й. Загальна психологія: навч. посібник / М.Й. Варій. – К.: Центр учбової літератури, 2007. – 968 с.
14. Василенко Л. П. Вікова психологія: Навчальний посібник /Л. П. Василенко, М. В. Савин. – К.: Академвидав, 2005. – 360 с. (Альма-матер)
15. Вікова та педагогічна психологія: навч. Посіб. / О. В. Скрипченко., Л. В. Волинська, З. В. Огороднійчук та ін. – К.: Просвіта, 2001. – 416 с.
16. Геометрия. 7—9 кл.: учеб. / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. - М. : Просвещение, 1989.
17. Герасимов Р.В. Дистанційне навчання математики як засіб створення рівних умов для розвитку особистості учнів: дипломна робота / Р.В. Герасимов – Суми: СумДПУ імені А.С.Макаренка, 2012. – 79 с.
18. Герасимов Р.В. Дистанційні курси як один з засобів вдосконалення знань школярів з геометрії: магістерська робота / Р.В. Герасимов – СумДПУ імені А.С.Макаренка, 2013. – 94 с.
19. Геометрія: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Істер О.С., Єргіна О.В. Профільний рівень – К.: Генеза, 2018. – 368 с
20. Геометрія. 10 клас. Профільний рівень / Аркадій Мерзляк, Віталій Полонський, Дмитро Номіровський, Михайло Якір – Х : Вид-во «Гімназія», 2018. – 240 с.
21. Гильберт Д. Основания геометрии .-Пер. С 7-го изда. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 492 с.
22. Гончаренко С.У. Український педагогічний словник. – К.: Либідь, 1997. – 206 с.
23. Гулівата І. О. Демонстраційні комп'ютерні моделі як засіб формування просторової уяви / І. О. Гулівата, В. Ф. Заболотний // Зб. наук. пр. Херсон. держ. ун-ту. Сер. Педагогічні науки. – Херсон, 2010. – Вип. 56. – С. 401–406.

24. Єршова А.П. Геометрія: підручник для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршова – Х.: Ранок, 2008. – 256 с.
25. Єршова А.П. Геометрія: підручник для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський, С.В. Єршова – Х.: Ранок, 2009. – 256 с.
26. Жалдак М.И. Компьютер на уроках математики: пособие для учителей / М.И. Жалдак. – [2-е изд., перераб. и доп.] – К.: ДИНИТ, 2004. – 327 с.
27. Заброцький М. М. Вікова психологія: Навчальний посібник / Заброцький М. М. – К.: МАУП, 2002. – 104 с.
28. Загальна психологія: Підручник / [О. В. Скрипченко, Л. В. Долинська, З. В. Огороднійчук та ін.]. – К.: Либідь, 2005. – 464 с.
29. Ілляшенко В. Я. Основи геометрії: Навч. посіб. для вищ. навч. закл. – Луцьк РВВ «Вежа» Волин. нац.ун-ту ім.Лесі Українки, 2012. - с.
30. Іванюта О.В. Розвиток візуального мислення підлітків / О.В. Іванюта, С.М. Симоненко. – Одеса: ПНЦ АПН. України, 2003. – 275с.
31. Істер О.С. Геометрія: підручник для 7 кл. загальноосвіт. навч. закладів / О.С. Істер. – К.: Освіта, 2007. – 159 с.
32. Істер О.С. Математика: (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): Підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти. К.: Генеза, 2018.- 384 с.
33. Кисельов А. Геометрія. Підручник та збірник задач. 8—9 клас. 1966
34. Киселев А.П. Геометрия: ч.2: Стереометрия. — М.: Учпедгиз, 1961. — 121 с.
35. Киселев А.П. Геометрия ч.2 Стереометрия: для 9-10 кл. / под ред.и с доп. Н.А. Глаголева. М.: Просвещение, 1974. — 103 с.
36. Колмогоров А.Н., Семенович А.Ф., Черкасов Р.С. Геометрия 6-8. – М.: Просвещение, 1979. - 386 с.

37. Крамаренко Т.Г. Уроки математики з комп'ютером: навч. посіб. / Т.Г. Крамаренко, М.І. Жалдака. – Кривий Ріг: Видавн. дім, 2008. – 272 с.
38. Кульчицька Н. В. Вивчення стереометрії в старшій школі в умовах використання нової інформаційної технології: дис. канд. пед. наук : 13.00.02 / Н. В. Кульчицька ; УДПУ ім. М. П. Драгоманова. – К., 1993. – 144 с.
39. Литвиненко Г. М. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з шкільного курсу математики / Литвиненко Г. М. / Математика. – 2000. - №35. – С. 2-3.
40. Медяник А. Г. Учителеві про шкільний курс геометрії. – К.: Рад. шк. 1988. – 156 с.
41. Методика викладання математики: самостійна робота / Укладач: Данієлян А.Я. — Луганськ: СПД Резніков В.С., 2011. — 168 с.
42. Міністерство освіти і науки України. Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. Режим доступу: <https://mon.gov.ua/programy-10-11-klas/matematika.-riven-standartu.docx>.
43. Погорелов О.В. Геометрія. Планіметрія. Підручник для 7-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів. К.: Школяр, 2007. – 240 с.
44. Погорелов О.В. Геометрія. Стереометрія. Підручник для 10 - 11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. К.: Школяр, 2004. – 142 с.
45. Скрипченко О.В. Загальна психологія / О.В. Скрипченко, Л.В. Долинська, З.В. Огороднійчук та ін. – К.: Каравела, 2009. – 464 с.
46. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
47. Стеганцева П. Г. Основи математики. Основи геометрії: навч.-метод. посібник для здобувачів ступеня вищої освіти магістра спеціальності «Математика» / П. Г. Стеганцева, М. О. Гречнева. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 85 с.

48. Тесленко І. Ф., Чашечников, С. М., Чашечникова Л. І. Методика преподавания планиметрии. К.: Р. шк., 1986 с. – 160 с.
49. Фіцула М. М. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти/ Фіцула М. М. - К.: Видавничий центр "Академія", 2001. - 528 с.
50. Чашечникова Л.Г., Чашечникова О.С. Вивчення геометрії – школа логічного мислення // Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2010), м. Черкаси, 24–26 листопада 2010 р. – Черкаси: ЧНУ імені Богдана Хмельницького, 2010.- С.148-149.
51. Чашечникова О. С. Вплив індивідуальних особливостей учнів на засвоєння навчального матеріалу з математики. / Чашечникова О. С. // Математика. – 2008. - №19(463). – С. 1-6.
52. Чашечникова О. С. Вплив особливостей оперування навчальним матеріалом на розвиток творчого мислення учнів / О. С. Чашечникова // Математика в школі, 2011. – № 3. – С. 38–45. 598.
53. Чашечникова О. С. Створення творчого середовища в умовах диференційованого навчання математики. Монографія / О. С. Чашечникова. – Суми: Вид.: ІП Вінниченко М.Д., ФОП Литовченко Є.Б., 2011. – 412 с.
54. Чашечникова О. С. Теоретико-методичні основи формування і розвитку творчого мислення учнів в умовах диференційованого навчання математики / О. С. Чашечникова. Дис. на здобуття наук. ступеня доктора педагогічних наук за спеціальністю 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика). – Сум ДПУ ім. А. С. Макаренка. – Суми, 2011. – 558 с.
55. Чашечникова О. С. Шляхи розвитку творчого мислення в умовах профільного навчання математики / О. С. Чашечникова // Математика в школі. – 2010. – № 10. – С. 33–36, № 11. – С. 33–37. 599.
56. <https://imzo.gov.ua/pidruchniki/elektronni-versiyi-pidruchnikiv/>

Список публікацій з теми

1. Безлюдна Т.Г. Теоретико-методичні аспекти ознайомлення школярів із логічною побудовою геометрії на аксіоматичній основі// Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2023» ФМД: матеріали Міжнародної дистанційної науково-методичної конференції (17 листопада 2023 р., м. Суми).

2. Безлюдна Т.Г., Чашечникова О.С. Проблема важливості ознайомлення сучасних школярів із побудовою геометрії на аксіоматичній основі // Крок у науку: дослідження у галузі природничо-математичних дисциплін та методик їх навчання: Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародно участю студентів, аспірантів і молодих вчених(07 грудня 2023р., м. Чернігів). Чернігів: НУЧК імені Т.Г. Шевченка, 2023, с. 19-20.

ДОДАТКИ

Додаток А

Як прийнято вважати, близько **300 року до н. е.** в Александрії Єгипетській афінський математик Евклід написав книгу, у якій подано систематизований виклад геометрії, а також деяких питань алгебри. Завдяки логічній побудові і запропонованій методології доведення складних теорем на основі простих постулатів «Начала» протягом 22 століть залишались основним підручником з геометрії і за кількістю перевидань різними мовами світу поступались лише Біблії.

Окремі епізоди біографії Евкліда, які з відносною точністю вдалось встановити завдяки згадкам про нього інших вчених, що жили багато років після описуваних подій, дозволяють вважати, що народився він в Греції, можливо в Афінах, де був учнем філософської школи Платона, і у 322 році до н. е. прибув до міста Александрія Єгипетська. Цей час припадає на правління першого єлліністичного царя Єгипту Птолемея Сотера, за якого десять років перед тим засноване Олександром Македонським місто інтенсивно розбудовувалось і швидко перетворилось на центр наукової діяльності.

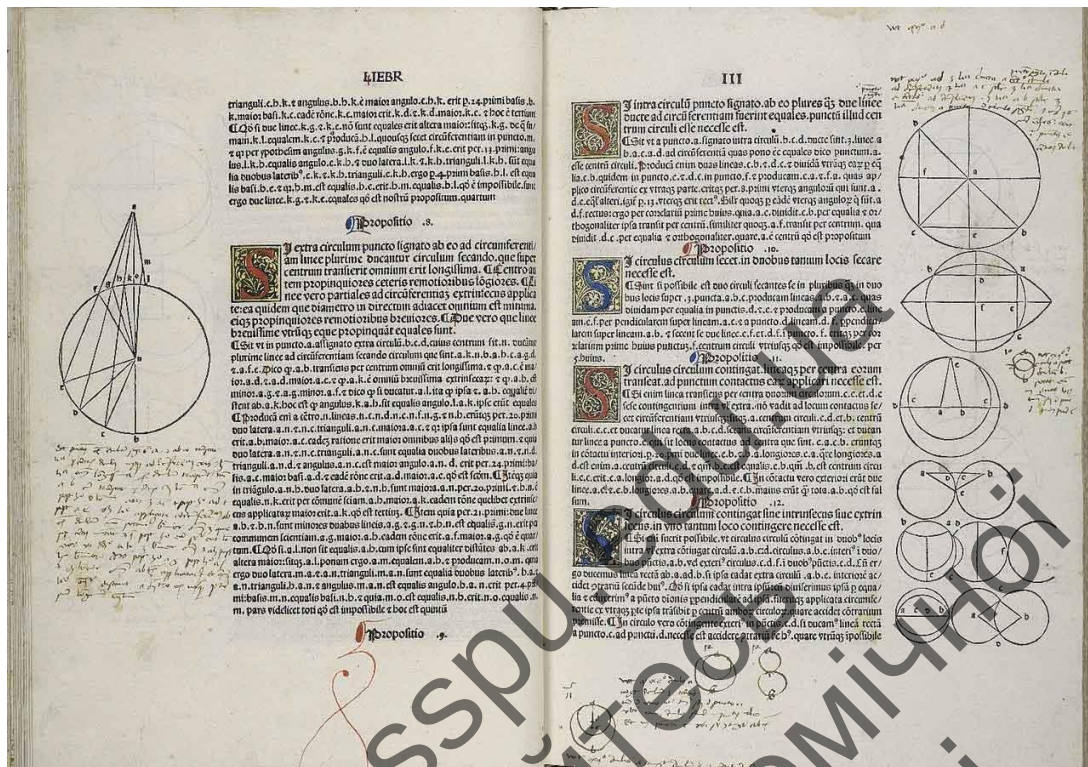
Біля **300 року до н. е.** Евклід заснував власну наукову школу і цим же роком датується написання ним книги, у якій міститься систематизований виклад геометрії, а також деяких питань алгебри. Вона відома за її латинською назвою «Elementa» («Начала») і складається з тринадцяти розділів, в яких на основі постулатів і аксіом викладаються властивості базових плоских багатокутників і доводяться теореми з планіметрії, викладаються основи стереометрії, а також деякі питання теорії елементарних чисел та множин.

Через брак достовірної інформації про життя людини, відомої сьогодні як Евклід, деякі історики науки вважають «Начала» результатом роботи групи математиків, які взяли собі ім'я цілком реальної особи, — знаменитого учня Сократа і опонента Платона афінського філософа Евкліда Мегарського (436-365 рр. до н. е.). На це вказує і відсутність автора на ранніх рукописних

копіях «Начал», а єдиною згадкою про Евкліда як їх автора є коментар до книги, зроблений через сім століть афінським філософом Проклом Діадохом (412-485 pp.).

Незважаючи на те, що подана в «Началах» інформація здебільшого була відома задовго до Евкліда, завдяки логічно побудованій структурі викладення і запропонованій методології доведення складних теорем на основі простих постулатів його книга протягом 22 століть залишалась основним і обов'язковим підручником з геометрії. Вона безліч разів переписувалась (найстаріший зі збережених її варіантів грецькою датується 888 роком і нині зберігається у Бодлеанській бібліотеці в Оксфорді, Англія), в V столітті була перекладена латиною, у 800-у році — арабською.

Особливого поширення в Європі «Начала» набули після появи латинського перекладу з арабського рукопису, виконаного в 1120 році англійським схоластом Аделардом Батським, і особливо латинського перекладу з грецької італійця Джованні Кампано 1260 року. Праця Евкліда була серед перших друкованих наукових книг — вже у 1482 році у Венеції «Начала» латиною видав Ерхард Ратдольт, вказавши в якості автора Евкліда Мегарського.



Розворот «Начал» Евкліда, виданих Ерхардом Ратдольтом у Венеції в 1492 році

До кінця XIX століття, коли почали з'являтися оригінальні підручники з геометрії, а сама геометрія розвинулась настільки, що стала досліджувати тривимірні простори ненульової кривини, «Начала» Евкліда за кількістю перевидань різними мовами світу поступались лише Біблії.