

Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики, фізики та методик їх навчання

Захарченко Тетяни Іванівни

**ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ТЕОРІЇ ІГОР У ПОЗАКЛАСНІЙ
РОБОТІ З МАТЕМАТИКИ**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Освітня галузь: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеню магістра

Науковий керівник

_____ О.О. Одінцова,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри математики, фізики та
методик їх навчання

« ____ » _____ 2022 року

Виконавець

_____ Т.І. Захарченко
« ____ » _____ 2022 року

Суми 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ	6
1.1. Позакласна робота з математики	6
1.2. Детальна характеристика факультативів і гуртків з математики	10
1.3. Роль математичного моделювання як специфічного способу дослідження в сучасній математичній освіті	14
РОЗДІЛ II. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР У ГУРТКОВІЙ РОБОТІ З МАТЕМАТИКИ	24
2.1. План роботи математичного гуртка з теми «Елементи теорії ігор»	24
2.2. Розробка занять математичного гуртка з теми «Елементи теорії ігор»..	25
2.2.1. Заняття 2 з теми «Класичні задачі теорії ігор»	25
2.2.2. Заняття 4 з теми «Матричні ігри. Ігри в чистих стратегіях»	31
2.2.3. Заняття 5 з теми «Матричні ігри з природою. Матриця ризиків»	38
2.2.4. Заняття 7 з теми «Прийняття рішень в умовах ризику. Критерії прийняття рішень в умовах ризику»	45
2.2.5. Заняття 10 з теми «Прийняття рішень в умовах повної невизначеності. Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності».....	52
2.2.6. Заняття 13 з теми «Розв’язування задач за допомогою критеріїв»...	59
ВИСНОВКИ.....	71
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	72
Додаток.....	77

ВСТУП

Актуальність. Здатність до математичного опису реальних процесів через математичне моделювання, оперування моделями, їх аналіз, розв’язування задач практичного змісту є невід’ємною складовою сучасної шкільної природничо-математичної освіти. Про важливість такої здатності свідчить і Державний стандарт базової середньої освіти, і зміст програми з математики ЗНО, і концепція Нової української школи. [13; 43; 33].

Нажаль, під час проведення уроків учителям не вистачає часу на формування і розвиток вміння створювати математичні моделі та вміння їх опрацьовувати. Саме через це результати проходження ЗНО з математики у розрізі розв’язування задач практичного змісту є доволі поганими. Аналогічна ситуація мала місце і при проходженні міжнародного оцінювання PISA для дітей 14-15 років у 2018 році [38, 14].

Сучасні математичні ідеї є доволі складними для розуміння учнями навіть старшої школи як з математичної, так і з термінологічної точок зору. Про те серед сучасних математичних теорій та їх розділів є такі, що можуть бути зрозумілими і застосовуваними навіть учнями основної школи. Прикладом такого матеріалу можуть бути задачі окремих розділів теорії ігор.

Зараз багато школярів вважають математику одним із найнудніших і найважчих уроків. Одним із найважливіших завдань вчителя є вміння прищепити інтерес до вивчення, підвищити рівень математичної освіти учнів. Математичні гуртки – це безпосередні помічники у вирішенні даного питання. Уведення гурткової роботи дозволить ознайомити учнів із багатьма цікавими можливостями математики та розширити знання.

Теорія ігор пропонує математичні інструменти для передбачення стратегії опонента. Під грою мають на увазі ситуацію, де є предмет конфлікту та зацікавлені сторони. Тому теорія ігор застосовується у конфліктології. Також її використовують у математиці, інформатиці, економіці, політології, психології, юриспруденції, спорті, соціальних науках, біології, розробці штучного

інтелекту, проведенні аукціонів і повсякденному житті для будь-якого рішення.

Математика стикається з повсякденним життям набагато тісніше, ніж цього навчають зазвичай у школі. Світ промисловості, страхові компанії, лотереї, азартні ігри, виборчі кампанії, страхові компанії та багато іншого є боржниками імовірнісних законів. Тим часом, незважаючи на цю важливість, універсальний характер теорії ігор все ще не став загальноприйнятим. Тому важливо показати як застосування теорії ігор впливає на прийняття рішень у реальному житті.

Об'єкт дослідження – процес навчання математики під час позакласної роботи.

Предмет дослідження – особливості організації та змісту гурткової роботи з математики у питаннях вивчення елементів теорії ігор.

Мета дослідження – з'ясувати особливості осучаснення змісту гурткової роботи з математики через розгляд елементів теорії ігор.

Відповідно до мети, були сформульовані наступні **завдання**:

- 1) опрацювати наукову літературу за темою дослідження;
- 2) визначити роль і місце гуртка у сучасній системі освіти;
- 3) розробити план гурткової роботи з математики, що містить елементи теорії ігор;
- 4) створити систему занять гуртка, показавши можливості застосування теорії ігор.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел, додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, визначено об'єкт, предмет, вказано мету, відповідно до якої поставлено завдання дослідження.

У першому розділі «Теоретичні основи дослідження» розкрито особливості понять «математичного моделювання», «позакласна робота» з математики та особливості її організації та діяльності. Вивчено та проаналізовано сучасний стан математичної освіти в Україні. Показано значення гурткової роботи з математики у розвитку інтересу до предмету.

У другому розділі «Елементи теорії ігор у гуртковій роботі з математики» представлено орієнтований календарний план роботи гуртка. Наведено розробки гурткових занять, де створено низку задач, із тем: «Класичні задачі з теорії ігор», «Матричні ігри. Ігри в чистих стратегіях», «Матричні ігри з природою. Матриця ризиків», «Прийняття рішень в умовах ризику. Критерії прийняття рішень в умовах ризику», «Прийняття рішень в умовах повної невизначеності. Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності», «Розв'язування задач за допомогою критеріїв».

Методи дослідження. Теоретичні – системний аналіз наукової і навчально-методичної літератури з проблеми дослідження, моделювання педагогічних процесів. Емпіричні – спостереження, опитування, бесіди зі вчителями, вивчення і узагальнення досвіду вчителів математики.

Апробація результатів. Основні положення доповідалися на II Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2021» Форум молодих дослідників» (Суми, 2021 рік) на тему «Роль математичних гуртків у формуванні математичної компетентності». За результатами дослідження було написано тези до збірників Всеукраїнської студентської науково-практичної конференції «Історія науки – майбутньому вчителів / 2022» (Умань, 2022), Звітній студентській науково-практичній конференції фізико-математичного факультету, III Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2022» Форум молодих дослідників» (Суми, 2022 рік). Подано до друку статтю «До питання використання елементів теорії ігор в гуртковій роботі з математики» до збірника наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти» (фахове видання, індекс Copernicus).

РОЗДІЛ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Позакласна робота з математики

Вивчення математики дає великі можливості для інтелектуального розвитку особистості: розвиває логічне мислення, просторові уявлення та уяву, формує вміння визначати причинно-наслідкові зв'язки, моделювати ситуації тощо. Також вона тісно пов'язана з вивченням інших навчальних предметів: фізики, хімії, інформатики, астрономії, біології, загально-технічних і спеціальних дисциплін. Математика сприяє засвоєнню і гуманітарних дисциплін.

Однією з головних особливостей сьогодення в освітньому процесі є спрямованість на досягнення школярами обов'язкового рівня математичної підготовки та організація навчання на більш високому рівні тих учнів, які мають здібності та інтерес до вивчення математики. Звертаючи увагу на це варто змінювати вектор у сторону диференційованого навчання, індивідуальній роботі з учнями і на уроках, і в позаурочний час. Стандартні уроки мають обмеження у часі на кожен етап, що не дозволяє детально розглядати нестандартні завдання, проводити заняття у різноманітних формах. Важливу роль у зацікавленості учнів математикою відіграє позакласна робота з математики.

Позакласна робота з математики – це заняття, які проводяться в позаурочний час і базуються на принципі добровільної участі, мають на меті підвищення рівня математичного розвитку учнів і цікавості до предмета за допомогою поглиблення і розширення базового змісту програми [45, с.135].

Як стверджує М.М. Фіцула завданнями позакласної роботи є:

- закріплення, збагачення та поглиблення знань, які були набуті у процесі навчання, застосування їх на практиці;
- розширення загальноосвітнього світогляду учнів, формування в них наукового світогляду, вироблення вмінь і навичок самоосвіти;

- формування інтересів до різних галузей науки, техніки, мистецтва, спорту, виявлення і розвиток індивідуальних творчих здібностей та нахилів;
- організація дозвілля школярів, культурного відпочинку та розумних розваг;
- поширення виховного впливу на учнів у різних напрямках виховання [48, с.333-334].

Формами проведення позакласної роботи є:

- математичні гуртки – найпоширеніша форма;
- математичні вікторини;
- математичні вечори;
- математичні олімпіади;
- математичні газети;
- математичні турніри та естафети;
- тижні математики;
- математичні екскурсії.

Розглянемо коротко особливості кожної з форм позакласної роботи з математики.

Математичні вечори – форма позакласної роботи, яку проводять зазвичай із учнями паралельних класів один раз на півріччя або рік. Така форма потребує ретельної підготовки: розробити сценарій, запропонувати учням за літературою, яку рекомендує вчитель, підготувати і перевірити фрагменти виступів за змістом сценарію, підібрати наочний матеріал, зробити оголошення тощо. Серед тем, яким варто приділити увагу на математичному вечері, виділяють:

- підведення підсумків або олімпіад, або тижнів математики;
- біографія та досягнення видатних науковців у сфері математики;
- історія математики;
- ролі математики у житті та науково-технічному прогресі;
- окремим математичним темам тощо [45, с.136].

Вікторини з математики – своєрідне змагання, яке має на меті підвищити інтерес до математики, розкрити творчий потенціал школярів, виявити тих, які люблять математику. Учитель добирає завдання різного рівня складності для повторення теми або основних розділів із всіх тем і залучає усіх бажаючих як для підготовки, так і для проведення. Можна також проводити змагання між паралелями. Математичні вікторини вважають найлегшою формою позакласної роботи, яку можна використовувати під час проведення, наприклад, тижня математики або математичного вечора [5, с.141-142].

Турніри та естафети – найбільш жваві, яскраві форми позакласної роботи та є цікавими для учнів різного віку. Це командні змагання, які проводяться між кількома класами за такою схемою: за місяць до початку представники команд, які складаються з 5 учасників, підбирають деяку систему завдань, яку вони запропонують розв'язати команді-супернику; під час змагання команди мають дотримуватися відповідних правил для естафети або турніру; в кінці підбивається підсумок і перемагає та команда, яка набрала більшу кількість очок [5, с.142-143].

Для навчального процесу не є винятком і *екскурсії*. Це один із методів наочного навчання, коли вчитель із учнями виходять на вулицю, природу або виробництво з метою ознайомлення з різними вимірювальними приладами та їх роботою, обчислювальними центрами тощо. Учитель має спланувати екскурсію: спочатку самому відвідати заклад, який він планує показати, і спланувати навчальне значення майбутньої екскурсії [2].

Математичні газети видає з певною періодичністю комітет математичного гуртка, де висвітлено роботу гуртка, розміщено доповіді у скороченому вигляді, відомості про важливі математичні відкриття, питання з історії даного предмету, задачі, складені учнями, доведення теорем або формул гуртківцями, вправи, олімпіадні завдання, оголошення, наприклад, різноманітних конкурсів і результатів олімпіад, конкурсів. Газети або видаються у паперовому вигляді, або ж розміщуються в мережі Інтернет на шкільному сайті, що робить роботу гуртківців відкритою для більш широкої

аудиторії [5, с.140].

Олімпіади – ще один вид позакласної роботи – масові змагання, які проводяться задля заохочення учнів для творчого самовдосконалення, виявлення, розвитку здібностей талановитої молоді, допомога у виборі майбутньої професії; популяризації поглибленого вивчення, досягнень науки, техніки та новітніх технологій; підсумовування роботи факультативів, гуртків, секцій, наукових товариств; активізації всіх форм позакласної та позашкільної роботи з учнями; створення команд для участі в міжнародних олімпіадах. Арифметика, елементи алгебри, геометрії – це розділи, які використовуються для проведення математичних олімпіад. Учасники мають виконувати завдання самостійно, не використовувати засоби, не передбачені для проведення, і це повинні забезпечувати організатори змагання [41]. Відповідно до Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади етапами даних змагань є: шкільні (міжшкільні), районні (міські), обласні (в м. Києві – міський), на державному рівні [42]. Із розвитком технологій, для забезпечення рівності усіх учнів з'явилися Інтернет-олімпіади. Змагання такого типу проводяться за допомогою інформаційних і телекомунікаційних технологій.

Проведення *предметного тижня* у загальноосвітніх навчальних закладах – це традиційний захід. До підготовки, яка потребує багато часу, залучаються усі вчителі-предметники. Організатори розробляють сценарій, призначають відповідальних за випуск газет, оформлення, підготовку матеріалів і т. д.. Зазвичай напередодні тижня математики оформлення школи змінюється: вивішуються стінні газети, плакати, учні складають кросворди, ребуси, цікаві задачі. Протягом тижня проводяться різноманітні конкурси, нестандартні уроки, позакласні заходи, які мають бути актуальними і містити інформацію, яка забезпечить сприйняття матеріалу. Проведення тижнів математики дозволяє підвищити рівень математичної культури, інтерес до математики, формувати і розширити науковий світогляд [45, с.137-139].

Учнівські гуртки – самодіяльні об'єднання учнів, які поглиблено вивчають питання науки, літератури, мистецтва, завданням яких є поглиблення

і розширення світогляду школярів, задоволення їхніх запитів та інтересів, розвиток творчих здібностей, формування практичних умінь і навичок [9, с.78]. За допомогою гуртків можна поширювати серед школярів досягнення і значення математики як науки, виховати любов до дисципліни, визначити, розвивати здібності та поглиблювати знання учнів. Члени математичного гуртка беруть участь у олімпіадах, які мотивують учнів до самоосвіти, виховують самостійність, виявляють найобдарованіших. У той час групова робота виховує почуття колективізму [33].

1.2. Детальна характеристика факультативів і гуртків з математики

Гурток – група людей, які об'єднанні спільними інтересами для занять чим-небудь. Це спосіб для розвитку особистості будь-якого віку, це середовище, де можна знайти себе, виявити свої здібності та таланти.

Розглянемо завдання математичного гуртка:

1. Формування і розвиток розумових операцій: аналізу і синтезу, порівнянь, аналогій, класифікацій, узагальнень.
2. Розвиток та тренінг мислення.
3. Сприяння підвищенню інтересу до предмета.
4. Розвиток таких якостей творчої особистості, як пізнавальна посидючість, завзятість у досягненні мети, самостійна творчість.
5. Підготовка учнів до творчої діяльності, математичних досліджень [36, с.16].

Робота в гуртку ґрунтується на принципах: виховання, добровільної участі, суспільної спрямованості діяльності, розвитку ініціативи та самодіяльності, зв'язку з навчальною роботою, використанні ігрових форм, цікавості, емоційності [48, с.334].

Для активної роботи учнів створюють так звані секції, які виховують самостійність, розвивають критичність мислення та мають на меті:

1. Колекціонування матеріалів, які демонструють практичне застосування математики.

2. Накопичення народних задач, прийомів усної лічби, історичних матеріалів.

3. Написання наочних посібників із математики [25, с.12].

Керівнику гуртка, готуючись до проведення заняття, необхідно:

1. Зважати на рівень розвитку учасників для більш якісного вибору та розробки змісту, форм, методів і засобів навчання.

2. Планувати кілька варіантів проведення заняття.

3. Користуватися досягненнями в області психології, педагогіки.

4. Переймати педагогічний досвід.

5. Налаштовувати учнів на творчу атмосферу.

6. Вміти прогнозувати результати заняття [27, с.10-11].

Для успішного проведення гуртків є важливою мотивація учнів. Слід зацікавлювати учнів, зацікавлювати увагу на тому, що заняття у гуртку не аналогічними і не дублюють роботу на звичайних уроках, вміти кожен раз чітко і лаконічно формулювати ціль і характер заняття [26, с.341].

Найкращий час для організації гуртка – початок нового навчального року. На початку роботи гуртка необхідно обрати старосту, редколегію та розподілити усі інші завдання. Також потрібно не забувати про правила, які краще розробити вчителю разом з членами гуртка [26, с.341].

Особливу увагу при проведенні математичних гуртків слід приділяти тим формам гурткових занять, які дають можливість більшості учнів проявити ініціативність і розраховані на активну творчу роботу всіх його членів [25, с.12]. Якщо гурток об'єднує відносно стабільний склад учнів і працює за складеним заздалегідь планом, то ефективність роботи гуртка значно підвищується. Заняття мають бути жвавими, з елементами гри, змагань і захоплювати учнів [45, с.136]. При проведенні гуртків використовують традиційні та нестандартні форми і методи навчання, наприклад, лекції, семінари, доповіді, екскурсії, дискусії тощо.

Заняття з учнями у гуртку допомагають, приносять користь і самому вчителю. Для успішного проведення педагогу необхідно постійно поглиблювати свої знання з математики, слідкувати за новинами. Це також є запорукою проведення вчителем більш якісних уроків [3, с.7].

Серед функцій гуртка виокремлюють:

1. Розширення світогляду учнів.
2. Розвиток математичного мислення, вольових якостей, вміння використати математичної символіки та термінології.
3. Виховання самостійності, ініціативності, прагнення до творчості.
4. Формування культури праці, інтересу до математики.
5. Сприяння поглибленню знань [33].

Також керівнику для планування та проведення гуртка необхідно створити програму, яка має, як зазначає А.В. Фарков, такі основні вимоги:

1. Має бути присутня історичні та зацікавлюючий матеріал.
2. Наявність нестандартних, олімпіадних задач.
3. Урахування бажань учнів, особливостей школи та регіону.
4. Наявність необхідної літератури у вчителя [47, с.5].

Досить часто плутають поняття «гурток» і «факультатив», а буває й таке, що вважають їх словами-синонімами.

Математичні факультативи – це одна із форм позакласної роботи, це форма диференційованого навчання, яке розширює та поглиблює знання [45, с.139]. *Метою факультативних занять* є на основі врахування інтересів і нахилів учнів розширене і поглиблене вивчення програмного матеріалу, ознайомлення із загальними математичними ідеями і методами, розгляд найважливіші методи застосування математики на практиці [5, с.134]. Заняття на факультативі, по-перше, стимулюють розумову діяльність, по-друге, поєднують уроки і позакласні заняття.

Факультатив відрізняється від гуртка тим, що другий передбачає роботу зі здобувачами освіти, які мають початкову цікавість до предмета, а перший – стійку [45, с.140-141]. Також гурток відмінний від факультативних занять тим,

що другі є продуктивними лише для учнів, які виявляють глибинний інтерес і мають здібності до предмета. Зазвичай від факультативу вимагають набагато більше, ніж від звичайного уроку [5, с.135-136].

Факультативи з математики проводять за такою схемою: пояснення нового матеріалу, розв'язування завдань, закріплення матеріалу, використання технічних засобів. Зауважимо, що методика проведення факультативних занять майже не відрізняється від методики проведення звичайних уроків, але на факультативах є можливість більше приділяти увагу історії та прикладним питанням. Щодо домашніх завдань, то в обов'язковому порядку їх не треба задавати, а індивідуальні завдання можна давати окремим школярам на тривалий час. Доповіді, виступи з рефератами також рекомендовано використовувати на факультативах. Лекція, семінар – форми проведення факультативних занять з математики. На семінари школярі можуть підготувати повідомлення, наприклад, про цікаві застосування математичних методів, способи розв'язування нестандартних задач. При організації треба зважати на потреби учнів у підготовці до вступу, бо факультативи – це засіб до профільного навчання і вони допомагають у виборі майбутньої професії. Факультативні заняття так само, як і уроки, повинні мати виховний вплив, формувати науковий світогляд. Для проведення факультативних занять з математики залучаються як учителі школи, так і викладачі вищих навчальних закладів, інженерно-технічні працівники, науковці [5, с.135].

Проблемний виклад, дослідницький метод, евристичні бесіди – методи навчання на математичних факультативах. Для реалізації цих методів запропонуємо таку схему:

Вивчення необхідної
літератури

Пошук алгоритму
розв'язання задачі

Звіт на занятті

Факультативи можуть відвідувати як і ті учні, які мають успіхи з математики, так і ті, які не мають високих оцінок з предмету, але мають потенціал.

Задля агітації учнів ходити на факультативні заняття з математики доцільно на уроках пропонувати розв'язувати цікаві задачі, які потребують поглиблення знань [45, с.141-142].

Сучасна гурткова робота вимагає змін. На заняттях гуртка пропонуються прийоми швидкого рахунку, софізми, фокуси, розв'язування логічних і олімпіадних задач, ознайомлення із досягненнями та історією математики тощо [3, с.19]. Усі ці види занять, безперечно, допомагають всебічно розвинути учнів і підтримують інтерес до науки. Доцільним є включення елементів сучасної математики, наприклад, теорії ігор. Розгляд задач теорії ігор дозволяє побачити важливість сучасної математичної думки, розвиває алгоритмічне мислення, вміння аналізувати, прогнозувати дії, бути уважним до деталей [35].

1.3. Роль математичного моделювання як специфічного способу дослідження в сучасній математичній освіті

Досить часто у повсякденній і професійній діяльності можна зустріти задачі, які так чи інакше пов'язані з математикою. Наприклад:

1. Як постачальнику організувати у магазини доставку необхідних запчастин найбільш економічно?
2. Скільки рулонів шпалер треба придбати, аби поклеїти стіни у прямокутній кімнаті, висота якої дорівнює $2,5\text{ м}$, площа підлоги – 8 м^2 , вікна – $1,3\text{ м}^2$, дверей – $1,5\text{ м}^2$, якщо одного рулону вистачає на 6 м^2 ?
3. Скільки кахлів необхідно купити, аби зробити ремонт у ванній кімнаті?

Отже, володіння математичними навичками та вміння їх застосовувати до розв'язування проблем є гарантією успіху в сучасному світі.

Нова українська школа – наймасштабніша реформа МОН, яка створює приємну атмосферу для навчання. У такій школі учням до снаги відвідувати

заняття. Вони отримують практичні навички і вміють їх застосовувати. Дитиноцентризм – принцип, на якому побудована концепція НУШ. Реформа НУШ має широкий спектр інновацій, які мають вплив на позитивний розвиток освіти взагалі та є ефективними. Відбуваються зміни і у підходах до навчання, і у змісті освіти, який акцентує увагу на практичній спрямованості [32].

Наразі напрям освіти змінюється зі знаннєвого до компетентнісного. Серед переліку компетентностей, які закріплені законом України «Про освіту», є математична. Вона має на меті розвиток вміння застосовувати набуті знання, способи та методи з математики у майбутньому та здатності використовувати моделі задач. Також у цій компетентності йдеться про те, що учням слід усвідомлювати роль математичних знань, вмінь і навичок в повсякденному житті у різних сферах. Дана компетентність є важливою для успішного розвитку суспільства [13].

У сучасній програмі з математики для основної й старшої шкіл зазначено, що однією з цілей навчання є: «...формування ставлення до математики як невід'ємної складової загальної культури людини, необхідної умови її повноцінного життя в сучасному суспільстві на основі ознайомлення з ідеями і методами математики як універсальної мови науки і техніки, ефективного засобу моделювання і дослідження процесів і явищ навколишнього світу» [29; 30].

У додатку 8 до Державного стандарту базової середньої освіти представлено вимоги до обов'язкових результатів навчання учнів у математичній освітній галузі. Найбільшу увагу приділено моделюванню реальних процесів, ситуацій та стратегії їх вирішення. У результаті вивчення математики учень повинен виділяти у повсякденному житті ті ситуації, які розв'язуються математичними методами, вміти аналізувати математичну інформацію, знаходити шляхи розв'язання проблемних ситуацій та знає, як створити її математичну модель і конструктивно обговорити, представити розв'язання. Даний Державний стандарт складений тільки для 5-9 класів, але він є також актуальним і для учнів старшої школи [13].

Отже, можна зробити висновок, що є необхідність вивчення у шкільному курсі математики не тільки поняття «математичне моделювання», але його застосування для розв'язання задач у повсякденному житті.

Під *математичною моделлю* розуміють опис реального об'єкта, процесу чи явища (досліджуваної ситуації) мовою математичних понять, формул і відношень. І, згідно з цим означенням: *математичним моделюванням* називають метод наукового дослідження реальних об'єктів, процесів чи явищ, який ґрунтується на застосуванні математичної моделі як засобу дослідження. Отже, за допомогою математичної моделі можна звести дослідження нематематичного об'єкта до розв'язання математичної задачі за допомогою універсального математичного апарату, і як наслідок отримати кількісну та якісну інформацію про об'єкт дослідження [39]. Математичне моделювання впливає на здатність логічно міркувати та представляти ідеї, краще розуміти зміст математичних термінів, застосовувати свої знання для розв'язання задач прикладного змісту, аналізувати результати та формувати обґрунтовані узагальнення та висновки [22]. Розуміння завдання, побудова математичної моделі, робота над моделлю, інтерпретація, перевірка – основні етапи процесу математичного моделювання.

В.В. Волошена виділяє такі аспекти використання моделювання в навчанні:

1. Моделювання – зміст, який має бути засвоєний, і метод пізнання, яким мають оволодіти учні.
2. Це ефективний навчальний засіб формування наукового світогляду [6, с.31].

Процес розв'язування задачі – це послідовна побудова нових моделей. Розглянемо етапи цього процесу:

1. Формалізація – переклад задачі на мову математичної теорії, тобто побудова математичної моделі задачі: виразу, рівняння, функції тощо. Учні мають аналізувати об'єкт, виокремлювати суттєві та несуттєві властивості.
2. Дослідження побудованої математичної моделі – розв'язування

ситуації всередині математичної моделі, наслідком якої буде або нова модель, або остаточна відповідь. Учні повинні вміти обґрунтувати, чи відповідає створена математична модель умови задачі, будувати допоміжні моделі. Також необхідно, щоб школярі навчилися розв'язувати математичну модель різними способами та раціонально обирали спосіб розв'язання.

3. Інтерпретація одержаного розв'язку – результат транслюється на мову постановки задачі [44, с.68].

Аби сформувати в учнів правильне уявлення про необхідність математичного моделювання, виокремимо такі умови: врахування вікових і психологічних особливостей учнів; чітке формулювання мети; залучення до активної діяльності; урахування межі функціонування уміння.

Серед дидактичних функцій виділяють такі:

1. Пізнавальна: від простого до складного формується пізнавальний образ об'єкта.
2. Управлінська: орієнтування під час розв'язування задач, контроль правильності розв'язку й виявлення помилок, комунікація в процесі пояснення розв'язання.
3. Інтерпретаційна: один і той самий об'єкт можна виразити різними моделями.
4. Інші: естетична, забезпечення запам'ятовування, уваги, повторення [46].

Посилення мотивації та пізнавального інтересу, допомога у засвоєнні знань про навколишній світ, сприяння розвитку математичних компетентностей, гарантує формування наукової картини світу – це завдання, які розв'язує математичне моделювання.

Розглянемо задачі, які можна розв'язати за допомогою математичного моделювання.

Задача 1.1. Двоє трактористів можуть разом зорати поле за 6 днів. Після 2 днів спільної роботи одного з них перевели на іншу роботу, а другий продовжив працювати. Через 3 дні самостійної роботи другого з'ясувалося, що

зроблено $\frac{1}{2}$ всієї роботи. За скільки днів кожний робітник може виконати всю роботу?

Розв'язання

Побудова математичної моделі. Нехай перший тракторист може виконати всю роботу за x днів, а другий – за y днів. За 1 день перший тракторист виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а за 6 днів – $\frac{6}{x}$ частину роботи. Другий тракторист за 1 день виконує $\frac{1}{y}$ частину роботи, а за 6 днів – $\frac{6}{y}$ частину роботи. Оскільки за 6 днів спільної праці вони виконають усю роботу, то $\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1$. Дані формулювання можна записати скорочено у вигляді таблиці:

	Час роботи	Продуктивність праці	Обсяг роботи
Перший тракторист	6 днів	$\frac{1}{x}$	$\frac{6}{x}$
Другий тракторист	6 днів	$\frac{1}{y}$	$\frac{6}{y}$

Перший тракторист працював 2 дні і виконав $\frac{2}{x}$ частину роботи, а другий працював 5 днів і виконав $\frac{5}{y}$ частину роботи. Оскільки внаслідок цього було виконано $\frac{1}{2}$ всієї роботи, то $\frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{2}$. Дані формулювання можна записати скорочено у вигляді таблиці:

	Час роботи	Продуктивність праці	Обсяг роботи
Перший тракторист	2 дні	$\frac{1}{x}$	$\frac{2}{x}$
Другий тракторист	5 днів	$\frac{1}{y}$	$\frac{5}{y}$

Отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1, \\ \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Розв'язком системи (1) є пара чисел $x=9$, $y=18$. Отже, перший тракторист може зорати поле за 9 днів, а другий – за 18 днів.

Відповідь: 9 днів, 18 днів.

Задача 1.2. Водний розчин солі містив 140 г води. Після того як до розчину додали 70 г солі, її концентрація збільшилася на 10%. Скільки грамів солі містив розчин спочатку?

Розв'язання

Побудова математичної моделі. Нехай початковий розчин містив x г солі. Тоді його маса дорівнювала $(x+140)$ г, а концентрація становила $\frac{x}{x+140}$. Після того як до розчину додали 70 г солі, її маса в розчині склала $(x+70)$ г, а маса розчину – $(x+210)$ г. Тепер концентрація солі становить $\frac{x+70}{x+210}$, що на 10%,

тобто на $\frac{1}{10}$, більше, ніж $\frac{x}{x+140}$. Можна скласти рівняння

$$\frac{x+70}{x+210} - \frac{x}{x+140} = \frac{1}{10} \quad (2).$$

Дані формулювання можна записати скорочено у вигляді таблиці:

	Маса солі, г	Маса розчину, г	Концентрація солі
Було	x	$x+140$	$\frac{x}{x+140}$
Стало	$x+70$	$x+210$	$\frac{x+70}{x+210}$

на 10% >

Рівняння (2) має два корені: $x_1=140$, $x_2=-490$, з яких другий корінь не задовольняє умову задачі.

Отже, розчин містив спочатку 140 г солі.

Відповідь: 140 г.

Programme for International Student Assessment (далі PISA) – тестування, яке проводиться кожні три роки серед п'ятнадцятирічних учнів з усього світу та охоплює математику, природничо-наукові дисципліни та читання. Як стверджує Ганна Новосад, колишня міністерка освіти і науки України: «... дослідження (прим. PISA) оцінює суму теоретичних знань, а здатність учнів використовувати вміння, отримані у школі, у різних життєвих ситуаціях» [24].

Якщо говорити про результати PISA-2018 стосовно математичної грамотності, то оцінка складає 453 бали – другий рівень системи оцінювання, який вважається в країнах координаторах Організації економічного співробітництва та розвитку (далі ОЕСР) базовим. Тобто це учні, які можуть, по-перше, розв'язувати задачі, в яких можливі «прямі умовиводи», по-друге, «використовувати інформацію з одного джерела представлену в одній формі». Згідно результатів дослідження у блоці математики, 36% учнів в Україні не досягли результатів базового рівня, а 15,6% не досягли і першого. Порівнюючи кількість тих учасників, які отримали 3-6 рівні, то у країнах ОЕСР їх більше на 15,8%, ніж в Україні [1; 4].

Зовнішнє незалежне оцінювання – етап, який долає кожен випускник старшої школи України. На жаль, згідно зі звітами Українського центру оцінювання якості освіти у 2021 році 31,1% учасників не пододало поріг [37, с.221]. Завданням ЗНО є оцінка вміння «будувати математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ та досліджувати ці моделі засобами математики» [43]. Про те типовою є ситуація, коли можна почути від учнів: «Я не вмію розв'язувати і задачі та й сама математика мені не потрібна. Не розумію те, як я буду використовувати у житті, наприклад, синуси або косинуси. Рахувати я і так вмію».

Сертифікаційна робота з математики 2021 року мала серед переліку завдань задачі практичного змісту, наприклад, такі.

Завдання № 16. Прямолінійною дорогою AB рухається тролейбус (див. рисунок). Лінія CD електричного дроту паралельна AB й даху MN тролейбуса. Штанга KN , що на рисунку є відрізком, утворює з MN кут 30° . Відстані між

прямими CD й AB , MN й AB дорівнюють 6 м і 3,2 м відповідно. Укажіть проміжок, якому належить довжина (у м) штанги KN . Уважайте, що всі зазначені прямі лежать в одній площині (рис. 1.1) [38, с.239].

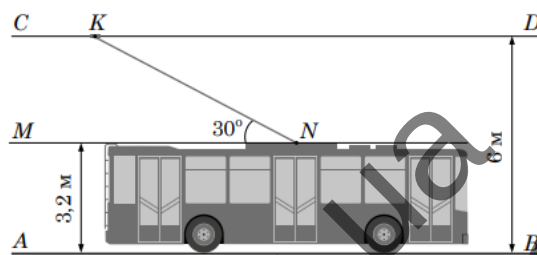


Рис. 1.1

А	Б	В	Г	Д
[1;3)	[3;5)	[5;5,5)	[5,5;6)	[6;8)

Для розв'язування цієї задачі треба було використати тригонометричні співвідношення між сторонами і кутами в прямокутному трикутнику.

У таблиці 1.1 наведено співвідношення відповідей учасників ЗНО з кількістю учасників, які їх обрали. Також можна побачити, що дане завдання виконала майже половина, тобто 46% від загальної кількості. Згідно з показником успішності це завдання є оптимальним [38, с.239].

Таблиця 1.1

Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
Г	9,2	22,7	10,5	46,0	10,7	0,9	46,0	68,8	0,5

Завдання 21. Олена купила через веб-сайт посадочний документ (див. фрагмент документа) на потяг, що коштує 240 грн. У його вартість входять вартості: квитка – 34,50 грн, плацкарти – 147 грн й інших витрат – 58,50 грн. За 10 годин до відправлення потяга Олена вирішила повернути цей посадочний документ. Відповідно до правил за таких умов їй повертають лише вартість квитка й половину вартості плацкарти. Крім того, за повернення посадочного документа з Олени додатково стягнуть збір 18 грн. (рис. 1.2).

МПС	ЦЕЙ ПОСАДОЧНИЙ ДОКУМЕНТ Є ПІДСТАВОЮ ДЛЯ ПРОЇЗДУ		
Прізвище, Ім'я		Абвгдейко Олена	Поїзд
Відправлення	2200001	КИЇВ-ПАСАЖИРСЬКИЙ	Вагон
Призначення	2200200	ВІННИЦЯ	Місце
Дата/час відпр.		12.12.2020 06:50	Сервіс
Дата/час приб.		12.12.2020 09:09	
ВАРТ = 240,00 ГРН			

Рис. 1.2

1. Яку суму грошей P (у грн) отримає Олена, повернувши цей документ?
2. Скільки відсотків від вартості документа становить сума грошей P [38, с.242]?

Це було структуроване завдання відкритої форми з короткою відповіддю.

Таблиці 2 і 3 показують кількість учасників тестування, які змогли дати правильну відповідь на 1 і 2 питання відповідно. Проведений аналіз результатів, свідчить, що лише 54,2% змогли заробити бали на 1 етапі, а на 2 етапі - лише 28,2%. Розв'язування завдання 21 виявило, що не всі учасники вміють аналізувати прочитане, виділяти головне, розуміти текстову інформацію, будувати математичні моделі. У даному завданні перша частина є оптимальною, а друга – складною (див. таблиці 1.2, 1.3) [38, с. 242].

Таблиця 1.2

Ключ	Розподіл учасників (%) кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1			
90	48,5	54,2	54,2	59,5	0,4

Таблиця 1.3

Ключ	Розподіл учасників (%) кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1			
37,5	71,8	28,2	28,2	65,9	0,6

Отже, виникає необхідність проведення систематичної роботи з учнями щодо створення математичних моделей та їх опрацювання.

Для того, щоб збільшити відсоток тих учасників, які зможуть виконати схожі завдання не тільки на ЗНО, а в житті, у подальшій професійній діяльності, необхідно, щоб вчителі як на уроках, так і у позаурочний час більше уваги приділяли компетентністим задачам, задачам практичного змісту і вчили будувати математичні моделі та оперувати ними. Про те слід пропонувати учням не однотипні задачі, а намагатися кожного разу урізноманітнювати їх. Це допоможе учням зрозуміти для чого їм потрібна математика і в майбутньому вони будуть безболісно долати труднощі, які пов'язані зі застосуванням отриманих знань до реального життя. Також можна використовувати роботу над проектами, метод навчання учнів через задачі у групах, урізноманітнити позакласні заходи з математики, у тому числі і гуртки [14, с.68]. Під час занять доцільно використовувати проблемні завдання. Вони мають базуватися на знаннях і вміннях, якими учень володіє, та містити в собі щось нове та незвичне, аби зацікавити, викликати інтерес та залучити до творчої діяльності. Також необхідно не забувати про запитання евристичного характеру.

РОЗДІЛ II. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІГОР У ГУРТКОВІЙ РОБОТІ З МАТЕМАТИКИ

2.1. План роботи математичного гуртка з теми «Елементи теорії ігор»

Із метою формування сталого інтересу до математики, а також активізації мисленнєвої діяльності учнів складено програму математичного гуртка, яка базується на вивченні теорії ігор.

Дана програма складена для учнів 9, 10 або 11 класів, які виявляють високий інтерес до математики. У результаті занять учні мають набути навички та вміння вирішувати різноманітні завдання, і навчитися використовувати математичні завдання для моделювання ігор. Також учні навчаться розуміти зв'язок між «іграми» і математикою. Програма гуртка, розрахована на 1 годину на тиждень. Вона реалізує вимоги державних стандартів з математики, значно поглиблює їх, доповнює різноманітністю математичних завдань.

Мета — створення умов розвитку інтересу учнів до математики, формування творчого процесу, розвиток логічного мислення, поглиблення знань та розширення загального світогляду здобувачів освіти у процесі живого розгляду різних практичних завдань і питань.

Приклад календарного планування занять гуртка наведено у таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Календарна планування гуртка

№ заняття	Тема	Дата
1	Основні поняття теорії ігор	
2-3	Класичні задачі теорії ігор	
4	Матричні ігри. Ігри в чистих стратегіях	
5 - 6	Матричні ігри з природою. Матриця ризиків	
7 - 9	Прийняття рішень в умовах ризику. Критерій прийняття рішень в умовах ризику.	
10-12	Прийняття рішень в умовах повної невизначеності. Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності.	
13 - 15	Розв'язування задач за допомогою критеріїв.	

Примітка 1. Починаючи із заняття 5, слід ввести учням деякі базові поняття теорії ймовірностей, наприклад, класичне означення ймовірності випадкової величини, неможливої та достовірної події, повної групи ймовірностей, застосовуючи елементи випереджального навчання.

Перейдемо до розгляду матеріалу, що можна застосовувати під час проведення запропонованих занять.

Примітка 2. У додатку запропоновано систему задач, яку можна використати під час проведення занять № 14-15.

2.2. Розробка занять математичного гуртка з теми «Елементи теорії ігор»

2.2.1. Заняття 2 з теми «Класичні задачі теорії ігор»

Мета:

- *навчальна:* сформувати в учнів уявлення про класичні задачі теорії ігор;
- *розвивальна:* розвивати кмітливість, винахідливість, інтуїцію, інтерес до вивчення математики;
- *виховна:* виховувати звичку до систематичної розумової праці, викликати захоплення внутрішньою красою математики.

Тип заняття: пояснення нового матеріалу.

Обладнання: конспект, «Асоціативний куш», картки із завданнями.

Хід заняття

I. Вступна частина

1. Організаційний момент

Вітання з учнями. Перевірка готовності гуртківців до заняття. Перевірка присутності.

2. Актуалізація опорних знань

Асоціативний куш

Складіть асоціативний куш до слова гра.

3. Повідомлення теми, мети, завдань заняття. Мотивація

Учитель повідомляє тему і мету заняття.

Що таке аукціон? Наприклад, англійський аукціон: перемагає той, хто запропонує найбільшу ціну за лот. Є тільки одне обмеження – мінімальний крок для підвищення ставки.

Яким чином можна виграти на аукціоні та витратити якомога меншу суму грошей? Заздалегідь подумайте про те, яку суму Ви можете заплатити за аукціонний товар і дайте собі установку не витратити більше – це одна із можливих стратегій виграшу.

Розв'язування квестів, загадок, інтелектуальних або логічних тестів після вивчення теорії ігор не стане для Вас великою проблемою.

Фронтальне опитування

1. Продовжіть речення: теорія ігор – це ...
2. Що називається грою? ходом?
3. Продовжіть речення: стратегія гравця – це ...
4. Яка стратегія називається оптимальною?
5. Продовжіть речення: функція виграшу – це ...

II. Основна частина

Розглянемо деякі класичні задачі теорії ігор.

Задача 2.1. «Дилема в'язнів»

Двоє затриманих є учасниками одного серйозного злочину. Їх вирішують допитати окремо один від одного. У кожного із них є два варіанти: зізнатися або не визнавати свою вину.

Залежно від обраного варіанту суд може прийняти такі рішення:

- Якщо тільки один із них зізнається, то його звільняють з-під варти. Іншого ж звинувачують у злочині та засаджують до 7 років позбавлення волі.
- Якщо ж обидва не зізнаються, то через те, що доказів недостатньо, звинувачення у серйозному злочині знімають. Але у слідчого є можливість довести, що вони винні у деякому незначному злочині, тоді їх ув'язнять кожного на 2 роки.

- Якщо кожен зізнається, що винний у серйозному злочині, то їх обох заключають під варту на 4 роки.

Можливість спілкування одного ув'язненого з іншим виключається та вони не мають ніяких зобов'язань один перед одним [50, с.76-77].

Розв'язання

Чи є запропонована задача – грою? Чому?

Дана задача є грою, бо у ній описані правила – всі варіанти дій, які можливі, та результат їх виконання кожним із в'язнів, який залежить від стратегії учасників.

Перед початком розв'язання з'ясуємо, що ж означає слово дилема. Простими словами, то це конфліктна ситуація при якій необхідно зробити деякий складний вибір між двома несприятливими, або взаємовиключними альтернативами, причому обидва варіанти мають майже однакову цінність і не один із них, неприйнятні для людини, яка приймає рішення.

Для полегшення розв'язання задачі, складемо таблицю, яку ще називають матрицю, до неї.

Таблиця 2.2. Матриця до гри «Дилема в'язнів»

	2-й злочинець Стратегія «зізнатися»	2-й злочинець Стратегія «не зізнаватися»
1-й злочинець Стратегія «зізнатися»	4 роки кожному	1-го відпускають 7 років отримує 2-й
1-й злочинець Стратегія «не зізнаватися»	7 років отримує 1-й 2-го відпускають	2 роки кожному

Зрада співучасника – це домінуюча стратегія для кожного гравця, бо так вони отримують найкоротший термін. Кожен має вирішити, чи зізнаватися, не знаючи рішення іншого.

На перший погляд аналіз задачі дуже простий. Хоча 1-й злочинець не може бути впевнений у тому, який вибір зробить 2-й злочинець, але він знає,

що йому краще за все зізнатися, коли зізнається співучасник, і отримати по 4 роки кожний, а також коли 2-й мовчить, то можна і не бути під вартою, на відміну від 2-го. Аналогічні будуть роздуми і у 2-го злочинця.

Отже, може здатися, що розв'язок простий: обидва злочинці мають зізнатися. Однак є одне «але». Обидва злочинці зроблять краще, якщо кожен промовчить, тоді вони отримають термін у 2 роки.

Дилема полягає в тому, що коли кожна з двох (або більше) сторін діє егоїстично і не співпрацює з іншою, їхні справи йдуть гірше, ніж коли вони діють безкорисливо і співпрацюють разом.

Задача 2.2. «Сімейна суперечка»

«Сімейна пара домовляється обрати одну з двох дій, кожна з яких вимагає їх спільну участь: дивитися фентезі або дивитися драму. Учасники гри не можуть спілкуватися між собою та домовитися про спільні дії.

У випадку вибору першої з двох дій виграш чоловіка буде втричі більше, ніж виграш дружини. Навпаки, у випадку вибору другої з цих двох дій виграш чоловіка буде втричі меншим за виграш жінки. Якщо сімейна пара обере різні дії, то виграш кожного з них буде рівним нулю.» [50, с.78].

Розв'язання

Дану гру можна представити у вигляді матриці, яка наведена у таблиці 2.3.

Таблиця 2.3. Матриця до гри «Сімейна суперечка»

	Дружина Стратегія «фентезі»	Дружина Стратегія «комедія»
Чоловік Стратегія «фентезі»	Чоловік отримує 3 бали, а дружина – 1 бал	Кожний отримує 0 балів
Чоловік Стратегія «комедія»	Кожний отримує 0 балів	Чоловік отримує 1 бал, а дружина – 3 бали

Отже, проведемо аналіз міркувань чоловіка: «Якщо дружина обере для перегляду комедію, то мені краще скласти їй компанію, ніж дивитися фільм наодинці. Бо мені буде вигідно та їй також. Але якщо ж дружина відмовиться

від свої поглядів і обере фентезі, то мені краще не змінювати свій вибір.» Аналогічними будуть і міркування дружини.

Можемо зробити висновок, що домінуючої стратегії у даній грі не існує. Ніхто з подружжя не захоче відхилитися від однакового вибору, як тільки такий буде досягнуто. Тим більше, що ані чоловік, ані дружина не зможуть мати більшу вигоду, якщо не заберуть її у партнера. Навіть якщо один із них отримає вдвічі більше балів, ніж інший, у будь-якому випадку сукупний прибуток все одно буде більшим, ніж якби пара розійшлася у своєму виборі.

Але якщо дана гра була не з одночасними діями, а з послідовними, то той, хто першим обирає фільм мав би перевагу. Тобто якщо чоловік буде обирати першим, тоді рівновага буде на його боці та його виграш буде дорівнювати 2, а дружини – 1. Аналогічною ситуація буде, якщо першою вибір буде здійснювати дружина.

Задача 2.3. «Злякався – програв»

Велосипедисти їдуть назустріч один одному на великій швидкості. В останню мить кожен із них має вирішити: повернути ліворуч, щоб уникнути зіткнення, чи ні. Подальші події можуть розвиватися наступним чином:

1. Якщо жоден із велосипедистів не злякається і вони не уникнуть зіткнення, то вони обидва отримають по 1 балу.
2. Якщо обидва велосипедиста все-таки в останню мить повертають, щоб не було аварійної ситуації, то нікого з них не можна вважати переможцем, але кожний отримує 4 бали.
3. Якщо один із велосипедистів повертає ліворуч, а інший – ні, тоді перший отримує всього-на-всього 2 бали, а другий – це переможець і йому зараховують 6 балів [15].

Розв'язання

У таблиці 2.4 показано матрицю до даної гри.

Поглянемо на ситуацію, коли обидва учасники гри захочуть набрати найбільшу кількість балів, тобто вони мають не повертати, то в результаті отримують найгірші результати (по 1 балу). Тоді може здатися, що краще

обрати стратегію «повертати». У цьому разі обидва матимуть хороші результати, але зауважимо, що ніхто не захоче повертати першим, бо тоді він отримає 2 бали, а суперник – 6 балів.

Таблиця 2.4. Матриця до гри «Злякався – програв»

1-й велосипедист \ 2-й велосипедист	Повертати	Не повертати
	Повертати	Не повертати
Повертати	4, 4	2, 6
Не повертати	6, 2	1, 1

Проаналізуємо ситуацію з іншого боку, тобто співпраці. Це означає, що якщо гравець повертає, то це є співробітництвом, якщо ж цього не відбувається, то це суперництво. У разі співробітництва вони обидва отримають добрий результат. Отже, це мають бути так звані перемовини: кожний намагається зробити поступку якомога пізніше, що змусить іншого уникнути зіткнення.

Але можна оголосити вибір своєї стратегії перед початком гри, якщо, наприклад, один із них заблокує кермо і це змусить суперника обрати іншу стратегію – повернути, аби уникнути зіткнення.

Отже, дана гра показує складність прийняти рішення у схожих ситуаціях, коли можна піти по принципу як співробітництва, так і суперництва.

III. Заключна частина

4. Підведення підсумків

Опитування:

- Яку назву мають задачі, які ми сьогодні розглядали? Чим вони схожі?
- У чому полягала дилема в'язнів?
- Який смисл задачі про сімейну суперечку?
- У чому полягала гра «Злякався – програв»?
- Закінчіть речення:
 - Я познайомився з ...
 - Було непросто ...

- У мене вийшло ...
- Мені запам'яталось ...

2.2.2. Заняття 4 з теми «Матричні ігри. Ігри в чистих стратегіях»

Мета:

- *навчальна:* сформувати на гуртку поняття матрична гра, гра в чистих стратегіях, сідлова точка, оптимальна стратегія;
- *розвивальна:* сприяти розвитку пізнавального інтересу учнів, інтелектуальних здібностей;
- *виховна:* виховувати культуру математичних записів.

Тип заняття: пояснення нового матеріалу.

Обладнання: конспект, картки із завданнями.

Хід заняття

I. Вступна частина

1. Організаційний момент

Вітання з учнями. Перевірка готовності гуртківців до заняття. Перевірка присутності.

2. Актуалізація опорних знань

Бліц-опитування

1. Продовжіть речення. Теорія ігор – це ...
2. Наведіть приклад класичної задачі теорії ігор.
3. Що таке стратегія?

3. Повідомлення теми, мети, завдань заняття. Мотивація

Темою нашого сьогоднішнього заняття є: «Матричні ігри. Ігри в чистих стратегіях». А мета нашого заняття – сформувати на гуртку поняття матрична гра, гра в чистих стратегіях, сідлова точка, оптимальна стратегія.

Розглянемо таку гру. Гравець X обирає один з трьох типів озброєння $i=1,2,3$, а гравець Y – один із трьох видів літаків $j=1,2,3$. У таблиці 2.5 задано матрицю до гри, де по горизонталі вказано ймовірності, з якими уразить

озброєння i кожний із літаків, а по вертикалі – імовірності поразки літака виду j озброєнням типу i .

Метою першого гравця є поразка літака, другого – прорив оборони супротивника.

На Вашу думку, яку стратегію треба обрати гравцям?

Таблиця 2.5. Матриця до гри про озброєння та літаки

$i \backslash j$	1	2	3
1	0,5	0,6	0,8
2	0,9	0,7	0,8
3	0,7	0,5	0,6

Правильна відповідь – це другий тип озброєння та другий тип літаків. Сьогодні Ви зрозумієте, чому саме так, з математичної точки зору.

II. Основна частина

4. Сприймання і первинне усвідомлення нового матеріалу

Матрична гра – антагоністична гра, у якій кожен гравець має скінченну множину стратегій [40]. Дані ігри з нульовою сумою є однокроковими і призначені для двох осіб.

Завданням гравця 1 є максимізація власного виграшу, що призведе до зменшення виграшу гравця 2. Аналогічно і для гравця 2.

Розв'язати матричну означає знайти оптимальну стратегію для кожного гравця. *Оптимальною* називається та стратегія, яка при усіх можливих стратегіях суперника може забезпечити гравцеві максимальний виграш. *А чиста стратегія* – це усі фіксовані стратегії, які може обрати гравець [11].

Нехай матричну гру задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

де рядки відповідають A_m чистим стратегіям гравця 1 (А), а стовпці – B_n чистим стратегіям гравця 2 (В). Дана матриця називається *матрицею виграшів* (платіжною матрицею).

Розглянемо поняття нижня ціна гри та верхня ціна гри.

Нижньою ціною гри називається таке число α , яке показує мінімальний виграш гравця 1, якщо він дотримується своєї стратегії:

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq m} (\alpha_i) = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} (a_{ij}).$$

Верхньою ціною гри є величина β , яка описує ситуацію, коли гравець 2, використавши свою мінімаксну стратегію, не гарантуватиме того, що виграш гравця 1 буде більшим з β :

$$\beta = \min_{1 \leq j \leq n} (\beta_j) = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} (a_{ij}).$$

Ціна гри – це об'єктивно можливий середній виграш, який відповідає оптимальному розв'язку гри: $\alpha \leq v \leq \beta$.

Якщо $\alpha = \beta = v$, то кажуть, що матрична гра має *сідлову точку* в чистих стратегіях і *ціну гри* v .

Теорема 2.1. [10] Для будь-якої матриці A справедлива нерівність

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} (a_{ij}) \leq \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} (a_{ij}).$$

Сідловою точкою в матричній грі називається пара $(i_0; j_0)$ чистих стратегій відповідно першого й другого гравців, при яких досягається рівність між верхньою й нижньою чистими цінами гри $\alpha = \beta$ [8].

Теорема 2.2. [10] Для того, щоб у матричній грі існувала сідлова точка, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} (a_{ij}) = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} (a_{ij}).$$

Розглянемо схему знаходження сідлових точок матриці A :

$$1. \quad A = \left(\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \min_j(a_{1j}) \\ \dots \\ \min_j(a_{ij}) \\ \dots \\ \min_j(a_{mj}) \end{array} \right\} \max_i \min_j(a_{ij})$$

$$\underbrace{\max_i(a_{i1}) \quad \max_i(a_{i2}) \quad \dots \quad \max_i(a_{ij}) \quad \dots \quad \max_i(a_{in})}_{\min_j \max_i(a_{ij})}$$

де $\min_j(a_{ij})$ – мінімальні значення по рядках для кожної стратегії i гравця 1, $\max_i \min_j(a_{ij})$ – найбільше серед отриманих $\min_j(a_{ij})$, $\max_i(a_{ij})$ – максимальні значення по стовпцях для кожної стратегії j гравця 2, $\min_j \max_i(a_{ij})$ – найбільше серед $\max_i(a_{ij})$.

2. Якщо виконується рівність $\max_i \min_j(a_{ij}) = \min_j \max_i(a_{ij})$, то існує сідлова точка $(i_0; j_0)$, при чому ціна гри $v = a_{i_0 j_0}$.

5. Формування вмінь і навичок

Задача 2.4. Компанія розглядає можливість виведення на ринок нових квітів. Попит на ці квіти неможливо точно визначити. Нехай їх вартість характеризується трьома можливими ринковими станами (A_1, A_2, A_3) . Із урахуванням цих умов аналізуються три можливі варіанти (B_1, B_2, B_3) випуску квітів. Кожен із цих варіантів потребує різних витрат і дає різну ефективність. Для даного випуску квітів і відповідного стану попиту прибуток, який оцінюється в тисячах гривень, отриманий компанією, визначається за допомогою матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 34 & 34 & 30 \\ 31 & 29 & 30 \\ 32 & 35 & 31 \end{pmatrix}.$$

Який обсяг випуску квітів забезпечив би середній прибуток за будь-якого стану ринку?

Розв'язання:

	B_1	B_2	B_3	$\min_j(a_{ij})$	$\max_i \min_j(a_{ij})$
A_1	34	34	30	30	31
A_2	31	29	30	29	
A_3	32	35	31	31	
$\max_i(a_{ij})$	34	35	31		
$\min_j \max_i(a_{ij})$	31				

$$\alpha = \max_i(\alpha_i) = \max_i \min_j(a_{ij}) = \max\{30, 29, 31\} = 31$$

$$\beta = \min_j(\beta_j) = \min_j \max_i(a_{ij}) = \min\{34, 35, 31\} = 31 \Rightarrow \alpha = \beta = 31 \quad (3).$$

Отже, із висновку (3) дана матриця має сідлову точку, тобто ціна гри $v=31$. Сідлова точка відповідає A_3 варіанту – прибуток 31 тис. грн., який не залежить від стану ринку.

Задача 2.5. Підприємства A і B пишуть однорідний товар двох видів, який може бути забарвлений у зелений або чорний колір. Аналіз попиту показує, що якщо випущений товар:

- 1) I і II зеленого кольору, то 30% купують I і 70% – II товар;
- 2) I зеленого і II чорного, то 75% обирають товар I зеленого кольору;
- 3) I чорного і II зеленого, то 80% купують товар I чорного кольору;
- 4) I і II чорного, то 25% обирають I товар.

Знайдіть оптимальні стратегії та ціну матричної гри.

Розв'язання:

Створимо платіжну матрицю для підприємства A , яке випускає товар першого типу. Розглянемо усі можливі варіанти.

1 випадок: I і II зеленого кольору, то 30% купують I і 70% – II товар, тоді $30\% - 70\% = 40\%$.

2 випадок: I зеленого і II чорного, то 75% обирають товар I зеленого кольору, тоді $75\% - (100\% - 75\%) = 75\% - 25\% = 50\%$.

3 випадок: I чорного і II зеленого, то 80% купують товар I чорного

кольору, тоді $80\% - (100\% - 80\%) = 80\% - 20\% = 60\%$.

4 випадок: I і II чорного, то 25% обирають I товар, тоді $25\% - (100\% - 25\%) = 25\% - 75\% = -50\%$

Отримані значення (виграші підприємства A) занесемо до платіжної матриці, яка наведена у таблиці 2.6.

Отже, відповідно до платіжної матриці дана гра не має сідлової точки, тобто у чистих стратегіях гра розв'язку немає.

Таблиця 2.6. Платіжна матриця до задачі 2.5

$A \backslash B$	II зелений	II чорний	α_i	α
I зелений	-40	50	-40	-40
I чорний	60	-50	-50	
β_j	60	50		
β	50			

Задача 2.6. Вкладник A хоче покласти гроші на депозит на півроку одну із сум: A_1, A_2, A_3, A_4 . Банк може на будь-який із варіантів відповісти варіантом надання процентної ставки B_1, B_2, B_3, B_4 . Для будь-якого вибору банку процентна ставка вкладника представлені платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 3 & 5 \\ 9 & 6 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min_j(a_{ij})$	$\max_i \min_j(a_{ij})$
A_1	6	3	4	8	2	2	6
A_2	2	4	8	3	5	2	
A_3	9	6	7	6	8	6	
A_4	8	5	6	5	10	5	

$\max_i(a_{ij})$	9	6	8	8	10
$\min_j \max_i(a_{ij})$	6				

$$\alpha = \max_i(\alpha_i) = \max_i \min_j(a_{ij}) = \max\{2, 1, 6, 5\} = 6$$

$$\beta = \min_j(\beta_j) = \min_j \max_i(a_{ij}) = \min\{9, 6, 8, 8, 10\} = 6 \Rightarrow \alpha = \beta = 6 \quad (4).$$

Очевидно, що після оцінки елементів матриці, виконується рівність (4), а ціна гри $\nu = 6$.

Максимальним виграшем для вкладника буде стратегія A_3 , тобто можна стверджувати, що його виграш не менше 6, а мінімаксом виграшем для банку – B_2 , це означатиме, що банк програє не більше ніж 6. Звідси можна зробити висновок, що найбільш оптимальною стратегією як для вкладника, так і для банку буде $(A_3; B_2)$ і депозитна процентна ставка дорівнюватиме 6. Зауважимо, що гравці програють, якщо оберуть стратегії, які відмінні від оптимальної. Наприклад, вкладник змінить вигідну стратегію на A_2 , а банк, обравши стратегію B_3 , зменшить його виграш до 2. Також якщо банк відступить від мінімаксу, то у нього є можливість збільшити програш до 10.

Задача 2.7. Знайти оптимально чисті стратегії гравців і чисту ціну гри, яка задана платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 8 & 10 & 1 \\ 9 & -7 & 2 & 1 & 9 \\ 10 & 8 & 1 & 5 & -4 \\ 8 & 10 & 8 & 11 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	$\min_j(a_{ij})$	$\max_i \min_j(a_{ij})$
A_1	-1	3	8	10	1	-1	8
A_2	9	-7	2	1	9	-7	
A_3	10	8	1	5	-4	-4	
A_4	8	10	8	11	9	8	
$\max_i(a_{ij})$	10	10	8	11	9		

$\min_j \max_i (a_{ij})$	8
--------------------------	---

$$\begin{aligned} \alpha &= \max_i (\alpha_i) = \max_i \min_j (a_{ij}) = \max\{-1, -7, -4, 8\} = 8 \\ \beta &= \min_j (\beta_j) = \min_j \max_i (a_{ij}) = \min\{10, 10, 8, 11, 9\} = 8 \end{aligned} \Rightarrow \alpha = \beta = 8.$$

Отже, ціна даної гри $\nu = 8$.

Максимально вигранною стратегією для першого гравця є стратегія A_4 . Максимальним програшем для другого гравця є стратегія B_3 . Звідси стратегія (A_4, B_3) – оптимальна для обох.

III. Заключна частина

6. Підведення підсумків

Що нового ви сьогодні дізналися?

На полях зошита намалуйте смайлик, який відповідає вашому настрою на кінець гуртка.

2.2.3. Заняття 5 з теми «Матричні ігри з природою. Матриця ризиків»

Мета:

- *навчальна:* сформувати в учнів уявлення про матричні ігри, матрицю ризиків;
- *розвивальна:* розвиток логічного мислення, інтересу до вивчення математики;
- *виховна:* виховання математичної мовної культури.

Тип заняття: пояснення нового матеріалу.

Обладнання: конспект, роздатковий матеріал для вправи «Світлофор», картки із завданнями.

Хід заняття

I. Вступна частина

1. Організаційний момент

Вітання з учнями. Перевірка готовності гуртківців до заняття. Перевірка присутності.

2. Актуалізація опорних знань

Бліц-опитування

1. Що називається сідловою точкою?
2. Продовжте речення: оптимальна стратегія – це ...
3. Як визначити ціну матричної гри?
4. Які класичні задачі теорії ігор Ви знаєте?
5. Як знайти оптимальну стратегію у матричній грі?

3. Повідомлення теми, мети, завдань заняття. Мотивація

Темою нашого сьогоднішнього заняття є: «Матричні ігри з природою. Матриця ризиків». А метою нашого заняття є формування уявлення про матричні ігри та матрицю ризиків.

Розглянемо таку задачу. На ринку хочуть прийняти рішення, щодо випуску деякого товару. Можливі такі три випадки:

1. Об'єм попиту на даний товар відомий точно.
2. Відомий лише статистичний розподіл можливих значень попиту.
3. Задані лише границі, у межах яких знаходиться попит, але у нас немає інформації, щодо його вірогідних майбутніх значень.

Тобто у третьому випадку ми отримали невизначеність. Дана ситуація може виникнути, коли, наприклад, попит на сезонні товари залежить від погодних умов. Сьогодні ми з Вами з'ясуємо особливості даних задач.

II. Основна частина

4. Сприймання і первинне усвідомлення нового матеріалу

Грою з природою називають математичну модель, вибір розв'язку якої залежить від об'єктивної дійсності. Наприклад, попит на ринку, стан природи тощо [12].

Ігри з природою потрібні для аналізу економічних ситуацій, оцінки ефективності рішень, які приймаються, та визначення альтернатив, у яких ризик пов'язаний з сукупністю невизначених факторів навколишнього середовища, які називають *природою* [12].

Розв'язання матричних ігор з природою зазвичай починається із побудови

платіжної матриці. Це відповідальний етап, бо помилки у платіжній матриці можуть призвести до помилкового кінцевого результату і не можуть бути компенсовані ніякими обчислювальними методами. Платіжна матриця (матриця виграшів) має наступний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

де a_{ij} – виграш гравця, якщо він обрав стратегію A_i , $i=1, \dots, m$, а стан природи – N_j , $j=1, \dots, n$.

Гру з природою також можна задати за допомогою матриці ризиків R , яку будують на основі (2.1).

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1j} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{i1} & r_{i2} & \dots & r_{ij} & \dots & r_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mj} & \dots & r_{mn} \end{pmatrix}.$$

Елементи r_{ij} матриці ризиків дорівнюють різниці між максимальним виграшем, який би отримав гравець, якщо б знав стан природи N_j , і виграшем, який дійсно б отримав, тобто

$$r_{ij} = \max_{k \leq n} a_{kj} - a_{ij}. \quad (2.2)$$

Зауваження 2.1. Незалежно від того, як задана гра з природою, завжди треба обирати ту стратегію гравця, яка буде найбільш вигідною порівняно з іншими. Оптимальну стратегію достатньо обрати тільки для активного гравця.

Іноді трапляються випадки, коли нижня і верхня ціни гри не рівні. Тоді можна спростити платіжну матрицю – *домінувати* стратегії. Даний процес полягає у тому, щоб виключити домінуючі стратегії тільки гравця A . Якщо $a_{ij} \leq a_{kj}$ для $\forall j=1, \dots, n$, то рядок, який відповідає стратегії A_i , можна викреслити.

Ігри з природою аналізують і за допомогою теорії ймовірностей і

математичної статистики, із якими знайомляться на уроках математики ще у школі. Простими словами імовірність – це можливість отримання певного результату.

Статистичний метод – один із найпоширеніших методів оцінки ризику. Імовірність появи випадкової події, середнє значення досліджуваної випадкової величини, дисперсія, середньоквадратичне відхилення, коефіцієнт варіації – це головні інструменти даного методу.

Дисперсія випадкової величини обчислюється за формулою:

$$D(X) = \sum P_i (X_i - \bar{X})^2, \quad (2.3)$$

де D – дисперсія, X_i – i -й елемент вибірки, $\bar{X}$ – середнє значення досліджуваної випадкової величини, P_i – імовірність появи випадкової величини [16, с.66].

Середньоквадратичне відхилення [16, с.66]:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}. \quad (2.4)$$

Як і дисперсія, так і середньоквадратичне відхилення є мірами абсолютної зміни та вимірюються в тих самих фізичних одиницях, які характеризують зміну.

Коли треба порівняти два варіанти з різними очікуваним ризиком і результати, то необхідно звернути увагу на *коефіцієнт варіації* γ , який обчислюється за формулою [16, с.67]:

$$\gamma = \frac{\sigma}{N}, \quad (2.5)$$

де σ – середньоквадратичне відхилення, N – очікуваний результат.

5. Формування вмінь і навичок

Завдання 2.8. Перетворити платіжну матрицю в матрицю ризиків.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ 5 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\max_i a_{i1} = 10; \max_i a_{i2} = 7; \max_i a_{i3} = 4; \max_i a_{i4} = 9.$$

Використавши формулу (2.2) перетворимо платіжну матрицю в матрицю ризиків:

$$R = \begin{pmatrix} 10-10 & 7-5 & 4-4 & 9-9 \\ 10-1 & 7-2 & 4-3 & 9-8 \\ 10-5 & 7-7 & 4-2 & 9-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Завдання 2.9. Домінують стратегії у грі, яка задана платіжною матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 & 1 & 7 \\ 4 & 10 & 7 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Дану матрицю можна зменшити на 2 рядки, стратегія A_1 домінує стратегії A_3 і A_4 , тому матриця матиме вигляд:

$$A' = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 9 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 7 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.10. «Веселий фермер» – підприємство, яке виробляє продукцію з молока. Вершкове масло – один із продуктів, який постачається сусідню країну. Генеральному директору підприємства слід вирішити, скільки ящиків вершкового масла потрібно виробляти протягом місяця. Імовірність того, що попит на даний продукт протягом місяця буде 7, 8, 9 або 10 ящиків рівні відповідно 0,1; 0,3; 0,4; 0,2. Аби виготовити один ящик, треба витратити 50 дол., а підприємство продає цей ящик за 100 дол. Якщо ж ящик із продукцією не купують протягом місяця і відповідно вершкове масло псується, то компанія не одержує прибутку. Скільки ящиків необхідно виготовити протягом місяця?

Розв'язання:

Побудуємо матрицю даної гри. Різні показники числа ящиків із вершковим маслом, які доцільно виробляти – це стратегії підприємства-гравця

«Веселий фермер». Природно виступають величини попиту на аналогічне число ящиків.

Виконаємо деякі обчислення. Наприклад, якщо підприємство виготовить 8 ящиків продукції, але попит буде тільки на 7:

- 1) $7 \cdot 100 = 700$ (дол.) – виторг виробництва;
- 2) $8 \cdot 50 = 400$ (дол.) – витрати підприємства;
- 3) $700 - 400 = 300$ (дол.) – прибуток від даного попиту і пропозиції.

При виробництві 8 ящиків і попиті у 8, 9 і 10 ящиків прибутки будуть рівними 400 дол. кожен.

Отже, аналогічно можна провести розрахунки при інших попитах і пропозиціях.

Порахуємо середній очікуваний прибуток при різному попиті та виробництві 8 ящиків. Для цього помножимо відповідні імовірності попиту на прибутки, які будуть отримані від виготовлення 8 ящиків і потреби у 7, 8, 9, 10 ящиків. Отриманні значення додамо.

$$300 \cdot 0,1 + 400 \cdot 0,3 + 400 \cdot 0,4 + 400 \cdot 0,2 = 390. \quad (2.6)$$

Аналогічно до (2.6) проведемо розрахунок і для іншої кількості виготовлених ящиків. Тоді матриця матиме вигляд, який представлений у таблиці 2.7.

Таблиця 2.7. Матриця до гри «Веселий фермер»

Попит Пропозиція	Попит				Середній очікуваний прибуток
	7 ящиків	8 ящиків	9 ящиків	10 ящиків	
7 ящиків	350	350	350	350	350
8 ящиків	300	400	400	400	390
9 ящиків	250	350	450	450	400
10 ящиків	200	300	400	500	370

Отже, 400 дол. – найбільший середній очікуваний прибуток, який відповідає виробництву 9 ящиків вершкового масла у місяць.

Уточнимо даний розв'язок за допомогою формул теорії ймовірностей. Одержимо, використавши формули (2.3), (2.4), (2.5), відповідні значення:

1) 7 ящиків:

$$D_1(X) = (350 - 350)^2 \cdot (0,1 + 0,3 + 0,4 + 0,2) = 0;$$

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\gamma_1 = 0.$$

2) 8 ящиків:

$$D_2(X) = (300 - 390)^2 \cdot 0,1 + (400 - 390)^2 \cdot (0,3 + 0,4 + 0,2) = 810 + 90 = 900;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{900} = 30;$$

$$\gamma_2 = \frac{30}{390} = \frac{1}{13} \approx 0,08.$$

3) 9 ящиків:

$$\begin{aligned} D_3(X) &= (250 - 400)^2 \cdot 0,1 + (350 - 400)^2 \cdot 0,3 + (450 - 400)^2 \cdot (0,4 + 0,2) = \\ &= 2250 + 750 + 1500 = 4500; \end{aligned}$$

$$\sigma_3 = \sqrt{4500} = 30\sqrt{5} \approx 67,08;$$

$$\gamma_3 \approx \frac{67,08}{400} \approx 0,17.$$

4) 10 ящиків:

$$\begin{aligned} D_4(X) &= (200 - 370)^2 \cdot 0,1 + (300 - 370)^2 \cdot 0,3 + (400 - 370)^2 \cdot 0,4 + (500 - 370)^2 \cdot 0,2 = \\ &= 2890 + 1470 + 360 + 3380 = 8100; \end{aligned}$$

$$\sigma_4 = \sqrt{8100} = 90;$$

$$\gamma_4 = \frac{90}{370} = \frac{9}{37} \approx 0,24.$$

Відповідно до цих розрахунків можна стверджувати, що 10 ящиків вершкового масла виробляти не варто, бо середній очікуваний прибуток при 10 менше, ніж при 9 ящиках, а $\sigma_4 > \sigma_3$. Але дані міркування не дають результату, якщо порівнювати виробництво 9 ящиків із 8 та 7. Серед усіх отриманих γ_i найменшим є γ_2 , тобто треба виробляти 8 ящиків продукції, а не 9, як ми отримали попередньо. Іншими словами генеральному директорові слід зробити власний вибір і все залежить від його ставлення до ризику.

III. Заключна частина

6. Підведення підсумків

Вправа «Світлофор»

У цій вправі пропонується оцінити свою діяльність на гуртку за допомогою світлофора («зелений» — на гуртку було цікаво, у мене все виходило, «жовтий» — на гуртку було цікаво, але з деякими завданнями у мене виникли труднощі, «червоний» — на гуртку було не цікаво, у мене нічого не виходило). Картки цих кольорів видаються учням до початку гуртка.

Висновки. У результаті проведеної вправи можна зробити висновки, що ви зрозуміли (частково зрозуміли або незрозуміли) поданий матеріал на гуртку. (У тих учнів, які підняли жовті чи червоні картки, спитати про те, що саме їм було незрозуміло).

2.2.4. Заняття 7 з теми «Прийняття рішень в умовах ризику. Критерії прийняття рішень в умовах ризику»

Мета:

- *навчальна:* забезпечити засвоєння учнями критеріїв прийняття рішень в умовах ризику;
- *розвивальна:* розвивати кмітливість, логічне мислення;
- *виховна:* виховувати активність, увагу, наполегливість.

Тип заняття: пояснення нового матеріалу.

Обладнання: конспект, картки із завданнями, «Асоціативний куш».

Хід заняття

I. Вступна частина

1. Організаційний момент

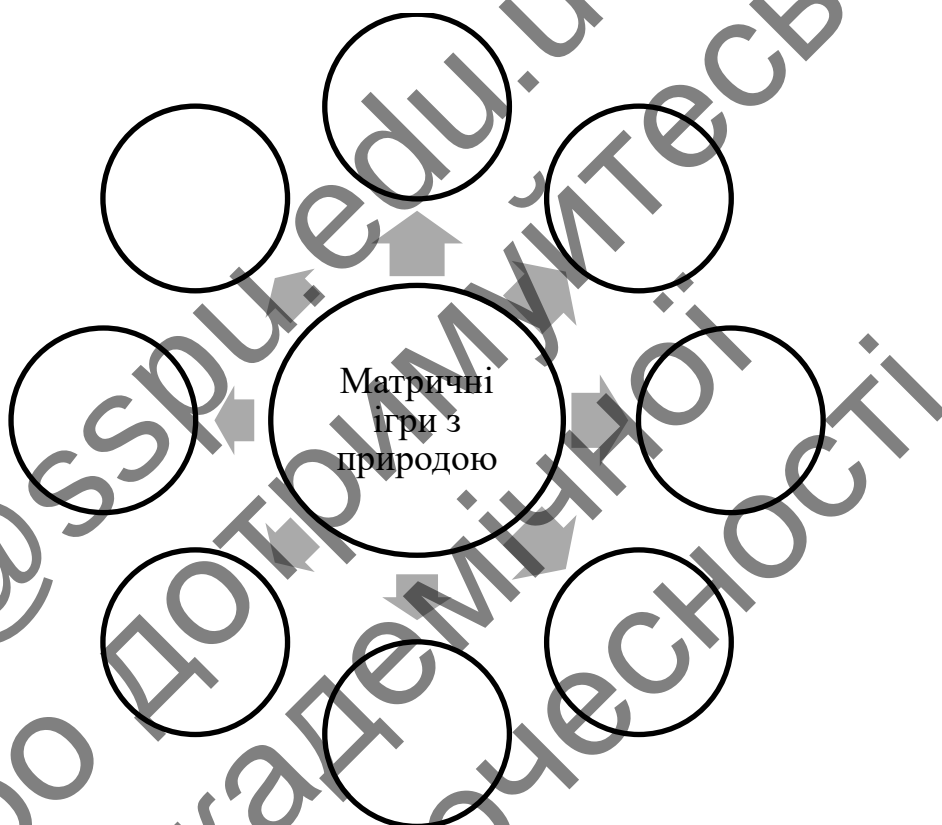
Вітання з учнями. Перевірка готовності гуртківців до заняття. Перевірка присутності.

2. Актуалізація опорних знань

Асоціативний куш

Учитель роздає кожному учню створений бланк, який потім залишиться в робочому зошиті учня.

Давайте складемо асоціативний куш щодо матричних ігор з природою. Запишіть в пусті кола, які слова або речення вам спадають на думку щодо даної теми. І ми разом складемо спільний куш понять, що стосуються матричних ігор з природою та є дотичними до навчального матеріалу.



3. Повідомлення теми, мети, завдань заняття. Мотивація

Учитель повідомляє тему і мету заняття.

Чи замислювалися Ви над тим, яким чином, наприклад, підприємці обирають скільки продукції їм треба купити, щоб не потрапити потім у борги? На цьому занятті ми почнемо шукати відповідь на дане питання.

II. Основна частина

4. Сприймання і первинне усвідомлення нового матеріалу

Сьогодні будемо розглядати такі ігри, в яких учасник знає імовірність того, коли настане стан природи.

Нехай задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Критеріями прийняття рішень в умовах ризику є:

- критерій Байеса:

Етапи застосування критерію Байеса:

1. Знаходимо показники ефективності $\bar{a}_i$, які ще називають середніми значеннями виграшу, для кожної стратегії A_i :

$$\bar{a}_i = p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j,$$

де p_j – імовірності станів природи, $i = \overline{1, m}$.

2. Обираємо найбільше серед $\bar{a}_i$, тобто $\bar{a}_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq m} \bar{a}_i = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} p_j$, яке відповідатиме оптимальній стратегії.

- критерій Лапласа:

Критерій Лапласа – це спрощена максимізація математичного очікування корисності, за якої передбачається, що рівні попиту мають однакову ймовірність, а це позбавляє від необхідності накопичення реальної статистики повторюваності рівнів попиту.

Етапи застосування критерію Лапласа:

1. Основа критерію: припускаємо, що $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$.
2. Знаходимо показники ефективності стратегій A_i :

$$\bar{a}_i = \frac{1}{n} \cdot (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}).$$

3. Обираємо найбільше серед $\bar{a}_i$, тобто

$$\bar{a}_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq m} \bar{a}_i = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{1}{n} \cdot (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in}) \right\}.$$

Отримане значення відповідатиме оптимальній стратегії [28].

- *критерій Ходжа-Лемана:*

Даний критерій – це суміш критерію Вальда, який ми розглянемо на наступних заняттях, і критерію Байеса.

Параметр $h \in [0;1]$, який має суб'єктивний характер, – це показник довіри до розподілу ймовірностей.

Етапи застосування критерію Ходжа-Лемана:

1. Знаходимо показники ефективності HL_i для кожної стратегії A_i :

$$HL_i = (1-h) \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} + h \cdot (p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in}),$$

де $h \in [0;1]$, p_j – імовірності станів природи.

2. Серед отриманих значень оберемо найбільше, тобто $HL = \max_{1 \leq i \leq m} \{(1-h) \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} + h \cdot (p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in})\} = \max_{1 \leq i \leq m} HL_i$. Та стратегія буде оптимальною, яка відповідає $\max_{1 \leq i \leq m} HL_i$ [23].

- *критерій Геймеєра:*

Критерій Геймеєра адаптований під величину втрат.

Етапи застосування критерію Геймеєра:

3. Будуємо матрицю Геймеєра G , яка має наступний вигляд

$$G = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot p_1 & a_{12} \cdot p_2 & \dots & a_{1j} \cdot p_j & \dots & a_{1n} \cdot p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} \cdot p_1 & a_{i2} \cdot p_2 & \dots & a_{ij} \cdot p_j & \dots & a_{in} \cdot p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \cdot p_1 & a_{m2} \cdot p_2 & \dots & a_{mj} \cdot p_j & \dots & a_{mn} \cdot p_n \end{pmatrix},$$

де p_j – імовірності станів природи, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

4. Знаходимо показники ефективності $GW_i = \min_{1 \leq j \leq n} p_j a_{ij}$ для кожної стратегії A_i .

5. Серед отриманих показників обираємо найбільше, тобто $GW = \max_{1 \leq i \leq m} GW_i = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} p_j a_{ij}$. Стратегія, яка відповідає отриманому значенню, і буде оптимальною [28, с.32].

5. Формування вмінь і навичок

Задача 2.11. Деяка фірма з виробництва побутової техніки деякий товар реалізовує або A_1 – одразу після виробництва, або A_2 – взимку, або A_3 – влітку, або A_4 – за великого попиту. Ціна пропонованого товару в даний період, можливі поломки та витрати на зберігання – фактори, від яких залежить прибуток фірми. Сума доходу, розрахована для різних станів співвідношення прибутків і витрат протягом періоду, наведена в матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -14 & 2 & -6 \\ -7 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 12 & 5 & -10 \\ -5 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Імовірність попиту на продукт відповідно дорівнює 0,3; 0,2; 0,2; 0,3. Яка стратегія за критерієм Байеса буде найбільш вигідною?

Розв'язання:

Відповідно до критерію Байеса маємо:

$$\bar{a}_1 = 1 \cdot 0,3 + (-14) \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 + (-6) \cdot 0,3 = 0,3 - 2,8 + 0,4 - 1,8 = -4,1.$$

$$\bar{a}_2 = -7 \cdot 0,3 + 7 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3 = -2,1 + 1,4 + 0,6 + 1,5 = 1,4.$$

$$\bar{a}_3 = 4 \cdot 0,3 + 12 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,2 + (-10) \cdot 0,3 = 1,2 + 2,4 + 1 - 3 = 1,6.$$

$$\bar{a}_4 = -5 \cdot 0,3 + 10 \cdot 0,2 + 9 \cdot 0,2 + 8 \cdot 0,3 = -1,5 + 2 + 1,8 + 2,4 = 4,7.$$

$$\bar{a}_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq m} \bar{a}_i = \bar{a}_4 - \text{максимальне серед отриманих значень, тому}$$

найбільш оптимальна відповідна стратегія A_4 – продавати продукцію за великого попиту.

Задача 2.12. X_1, X_2, X_3 – це три дизайн-проекти квартири. Вони можуть бути продані замовнику за чотирма сценаріями наявності обраних матеріалів у місцевих магазинах і гарантують різні прибутки, значення яких наведено у матриці

$$A = \begin{pmatrix} 27 & 20 & 33 & 25 \\ 25 & 30 & 20 & 35 \\ 40 & 21 & 23 & 30 \end{pmatrix}.$$

Який дизайн-проект слід обрати для продажу?

Розв'язання:

У цій задачі ми не знаємо ймовірності станів природи і не можемо віддати перевагу одному з них, тому вважатимемо їх рівно ймовірними. Тоді нехай

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$, тобто застосуємо критерій Лапласа:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{4} \cdot (27 + 20 + 33 + 25) = \frac{1}{4} \cdot 105 = 26,25.$$

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{4} \cdot (25 + 30 + 20 + 35) = \frac{1}{4} \cdot 110 = 27,5.$$

$$\bar{a}_3 = \frac{1}{4} \cdot (40 + 21 + 23 + 30) = \frac{1}{4} \cdot 114 = 28,5.$$

Отже, оберемо серед отриманих показників ефективності найбільший, тобто $\bar{a}_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq m} \bar{a}_i = \bar{a}_3$. Тоді відповідно до критерію Лапласа оптимальним буде реалізація проекту $X_3 = 28,5$.

Задача 2.13. Кондитерське підприємство виготовляє продукцію чотирьох видів. Попит на дану продукцію залежить від таких факторів:

A_1 – врожаю пшениці;

A_2 – цін на електроенергію;

A_3 – цін на паливо;

A_4 – споживчого чинника.

Платіжна матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 18 & 20 \\ 30 & 40 & 21 & 50 \\ 15 & 10 & 12 & 13 \\ 22 & 24 & 26 & 28 \end{pmatrix}.$$

Якою буде оптимальна стратегія за критерієм Ходжа-Лемана, якщо $h = 0,5$, а ймовірні стани природи 0,4; 0,1; 0,2; 0,3?

Розв'язання

Показник ефективності кожної зі стратегій дорівнюватиме:

$$HL_1 = (1 - 0,5) \cdot 14 + 0,5 \cdot (14 \cdot 0,4 + 16 \cdot 0,1 + 18 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,3) = 0,5 \cdot 14 + 0,5 \cdot (5,6 + 1,6 + 3,6 + 6) = 7 + 0,5 \cdot 16,8 = 7 + 8,4 = 15,4.$$

$$HL_2 = (1-0,5) \cdot 21 + 0,5 \cdot (30 \cdot 0,4 + 40 \cdot 0,1 + 21 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,3) = 0,5 \cdot 21 + 0,5 \cdot (12 + 4 + 4,2 + 15) = 10,5 + 0,5 \cdot 35,2 = 10,5 + 17,6 = 28,1.$$

$$HL_3 = (1-0,5) \cdot 10 + 0,5 \cdot (15 \cdot 0,4 + 10 \cdot 0,1 + 12 \cdot 0,2 + 13 \cdot 0,3) = 0,5 \cdot 10 + 0,5 \cdot (6 + 1 + 2,4 + 3,9) = 5 + 0,5 \cdot 13,3 = 5 + 6,65 = 11,65.$$

$$HL_4 = (1-0,5) \cdot 22 + 0,5 \cdot (22 \cdot 0,4 + 24 \cdot 0,1 + 26 \cdot 0,2 + 28 \cdot 0,3) = 0,5 \cdot 22 + 0,5 \cdot (8,8 + 2,4 + 5,2 + 8,4) = 11 + 0,5 \cdot 24,8 = 11 + 12,4 = 23,4.$$

Серед отриманих значень оберемо найбільше, тобто це $HL_2 = 28,1$. Звідси A_2 – це найбільш оптимальна стратегія для даного виробництва.

Задача 2.14. Ведучий поставив на стіл десять коробок та сказав, що у коробках I-го типу сховані 2 кролики і 5 іграшок, II-го типу – 6 кроликів і 1 іграшка. Також він зауважив, що скриньок I типу – 6 штук, II типу – 4 штуки. Правила гри були наступними:

- гравець підходить до будь-якої з коробок і має вгадати, якого вона типу або відмовитися від даної гри;
- якщо коробка I типу і він називає її правильно, то отримує 20 монет, у іншому випадку програє 10 монет;
- якщо коробка II типу і гравець називає її такою, то виграє 50 монет, якщо ж ні, то втрачає 15 монет.

Відомо, що ймовірність вибору гравцем I-го типу дорівнює 0,6, а II-го типу – 0,4. Яку стратегію треба обрати гравцю?

Розв'язання

Відповідно до умови платіжна матриця матиме вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -15 & 50 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо критерій Геймейера.

$$G = \begin{pmatrix} 20 \cdot 0,6 & -10 \cdot 0,4 \\ -15 \cdot 0,6 & 50 \cdot 0,4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -9 & 20 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Показниками ефективності кожної стратегії буде

$$GW_1 = -4; GW_2 = -9; GW_3 = 0.$$

Серед отриманих значень оберемо найбільше, тобто $GW = \max_{1 \leq i \leq m} GW_i = GW_3 = 0$. Відповідно до отриманого висновку стратегія «відмови» є найбільш вигідною.

III. Заключна частина

6. Підведення підсумків

Що нового ви сьогодні дізналися?

На полях зошита намалуйте смайлик, який відповідає вашому настрою на кінець гуртка.

2.2.5. Заняття 10 з теми «Прийняття рішень в умовах повної невизначеності. Критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності»

Мета:

- *навчальна*: пояснити сутність прийняття рішень в умовах повної невизначеності, забезпечити засвоєння гуртківцями інформації про критерії прийняття рішень в умовах повної невизначеності;
- *розвивальна*: розвивати уміння аналізувати, порівнювати та робити висновки;
- *виховна*: виховувати розуміння ролі математики в житті.

Тип заняття: пояснення нового матеріалу.

Обладнання: конспект, картки з завданнями.

Хід заняття

I. Вступна частина

1. Організаційний момент

Вітання з учнями. Перевірка готовності гуртківців до заняття. Перевірка присутності.

2. Актуалізація опорних знань

Фронтальне опитування

1. Як скласти матрицю ризиків?

2. Назвіть критерії прийняття рішень в мовах ризику.
3. Яку стратегію називають оптимальною?
4. Яка стратегія буде оптимальною, якщо $HL_1 = 4,5$; $HL_2 = \frac{5}{7}$; $HL_3 = 7$? У

якому критерії використовують такі позначення? Що означає оптимальна стратегія за цим критерієм?

5. Яка стратегія буде оптимальною, якщо $GW_1 = 1$; $GW_2 = 2\frac{4}{9}$; $GW_3 = 2,1$?

У якому критерії використовують такі позначення? Що означає оптимальна стратегія за цим критерієм?

3. Повідомлення теми, мети, завдань заняття. Мотивація

Учитель повідомляє тему та мету гурткового заняття.

Робити вибір часто доводиться в умовах повної невизначеності. Звичайно, така ситуація не сприяє прийняттю усвідомлених рішень, а страх, який супроводжує нас у такі моменти, стає ще сильнішим. Як впоратися зі страхом та навчитися приймати рішення у ситуаціях, коли відомо зовсім небагато?

II. Основна частина

4. Сприймання і первинне усвідомлення нового матеріалу

Умова повної невизначеності – це досить непроста ситуація. Дана умова виникає, коли результат рішення, яке було прийнято, невідомий.

Нехай задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Критеріями прийняття рішень в умовах повної невизначеності є:

- *максимінний критерій Вальда:*

Критерій Вальда ґрунтується на принципі максимального песимізму, тобто на припущенні, що швидше за все станеться найгірший варіант розвитку ситуації та ризик найгіршого варіанту потрібно звести до мінімуму.

За даним критерієм оптимальною є та стратегія $A_i (i=1, \dots, n)$, для якої найменший показник ефективності (виграш) $W_i = \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$ гравця 1 максимальний.

Тобто $W = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$ [17].

Максимінний критерій доречно застосовувати, коли треба прийняти рішення, що має такі особливості:

1. Необхідне виключення усіх ризиків.
2. Дотримання унікальності рішення.
3. Імовірності станів природи невідомі.
- *критерій максимакса (крайнього оптимізму):*

Критерій максимаксу призначений для вибору найбільшого елемента платіжної матриці з її максимально можливих елементів.

Етапи використання критерію крайнього оптимізму:

1. Для кожного рядочку обрати максимальний виграш, тобто $\max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$.
2. Серед усіх отриманих значень обрати найбільший показник ефективності, тобто $M = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$. Стратегія, якій відповідає отриманий показник, буде оптимальною [7].

- *критерій добутків в умовах повної невизначеності (P-критерій):*

Даний критерій застосовується тільки для додатних елементів: $\forall a_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Якщо дана умова не виконується, то виконується зсув на $b = |\min a_{ij}| + 1$.

За критерієм добутків оптимальна стратегія визначається співвідношенням

$$P = \max_i P_i = \max_i (a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \dots \cdot a_{in}),$$

де $a_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, P_i – показник ефективності стратегії A_i [28, с.36].

- *критерій песимізму-оптимізму Гурвіца відносно виграшів з показником оптимізму λ :*

Критерій Гурвіца – це регульований компроміс між крайнім песимізмом та повним оптимізмом.

Показник оптимізму λ показує те, наскільки гравець 1 може керувати ситуацією і чи може він розраховувати на гарний результат.

Оптимальну стратегію за критерієм Гурвіца можна знайти за співвідношенням

$$H_A = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \lambda \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \min_j a_{ij} \} = \max_{1 \leq i \leq m} H_i,$$

де $\lambda \in [0;1]$ – показник оптимізму, $1 - \lambda$ – показник песимізму, H_i – показник ефективності стратегії, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ [12].

- *критерій мінімаксного ризику Севіджа;*

Даний критерій прийняття рішень в умовах невизначеності заснований на принципі мінімізації втрат.

Етапи використання критерію мінімаксного ризику Севіджа:

1. Складемо матрицю ризиків R .
2. Для кожного рядка матриці ризиків знаходимо максимальне значення, тобто $\max_j r_{ij}$.
3. Серед отриманих значень обираємо те рішення, для якого максимальний ризик буде найменшим, тобто $S = \min_i \max_j r_{ij}$ [49, с.314-315].

Критерій Севіджа застосовують тоді, коли є достатня фінансова стабільність фірми та впевненість у тому, що деякий збиток не зможе призвести до великих втрат. Тому вибір оптимальної стратегії за даним критерієм дозволяє захистити гравця 1 від небажаних великих втрат.

5. Формування вмінь і навичок

Задача 2.15. Торговельне підприємство хоче додати до свого прайс-листа новий товар. Водночас відомо, що A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – п'ять варіантів, які можливі. Кожному з них відповідає конкретний вид виготовлення товару та їх поєднання. B_1, B_2, B_3, B_4 – це чотири типи розвитку економічної ситуації. Кожному отриманому виграшу, який характеризує відносну величину

результату, відповідає поєднання рішення та економічного становища.

Платіжна матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,22 & 0,14 & 0,2 \\ 0,4 & 0,7 & 0,51 & 0,3 \\ 0,75 & 0,125 & 0,42 & 0,95 \\ 0,1 & 0,9 & 0,45 & 0,5 \\ 0,48 & 0,55 & 0,8 & 0,35 \end{pmatrix}.$$

Яку стратегію за критерієм Вальда слід обрати торговельному підприємству?

Розв'язання

Мінімальними показниками ефективності W_i для кожної стратегії будуть:

$$W_1 = 0,14; W_2 = 0,3; W_3 = 0,125; W_4 = 0,1; W_5 = 0,35.$$

$$W = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = W_5 = 0,35 \quad \text{— це максимальне значення серед } W_i.$$

Звідси за критерієм Вальда оптимальною стратегією є A_5 .

Задача 2.16. За містом планують відкрити птахоферму. Для отримання найбільшого прибутку треба визначити оптимальну кількість птахів на птахофермі: A_1 — 50 птахів, A_2 — 130 птахів, A_3 — 112 птахів, A_4 — 75 птахів. Аби розв'язати дану проблему, складають кошторис витрат, де вказують різне число курей, а також враховують прибуток. Усі ці дані наведено в платіжній матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -13 & 10 & 19 \\ -2 & 6 & -9 & -11 \\ 5 & 11 & -7 & 12 \\ -8 & 9 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Відповідно до критерію крайнього оптимізму маємо:

$$\left. \begin{array}{l} \max_{1 \leq j \leq n} a_{1j} = 19 \\ \max_{1 \leq j \leq n} a_{2j} = 6 \\ \max_{1 \leq j \leq n} a_{3j} = 12 \\ \max_{1 \leq j \leq n} a_{4j} = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow M = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = 19.$$

Отже, за критерієм крайнього оптимізму найбільш вигідно тримати 50 птахів, тобто стратегія A_1 .

Задача 2.17. У лікарні є хворий, який перебуває в одному із трьох станів,

які не діагностовано:

A_1 – гостре захворювання та термінова операція необхідна;

A_2 – захворювання, для якого термінова операція не потрібна;

A_3 – захворювання, у якому термінова операція протипоказана.

Для успішного лікування пацієнта лікарю треба вирішити або проводити термінове хірургічне втручання, або відмовитися від операції. Матриця сприятливого стану хворого має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,9 & 0,7 \\ 0,8 & 0,5 & 0,95 \end{pmatrix}.$$

Яка за критерієм добутоків стратегія є оптимальною для лікаря?

Розв'язання

Для використання критерію добутоків необхідно, щоб виконувалась умова $a_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Дана умова виконується, тому переходимо до наступного кроку.

Знайдемо добутки по рядках $P_i = a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \dots \cdot a_{in}$:

$$P_1 = 0,97 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,6111;$$

$$P_2 = 0,8 \cdot 0,5 \cdot 0,95 = 0,38.$$

Звідси $\max_i P_i = P_1$, то P_1 – це оптимальна стратегія для лікаря в даній ситуації.

Задача 2.18. Деяке аграрне підприємство має три сценарії реалізацій зерна:

A_1 – одразу після збору врожаю;

A_2 – взимку;

A_3 – весною.

При цьому прибуток, який отримають від продажу зерна, залежить від N_1 – можливих втрат, N_2 – часу зберігання та N_3 – використаних грошей на зберігання зерна. Платіжна матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 15 & -8 \\ -5 & -10 & 20 \\ 7 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Яка стратегія буде найбільш вигідною за критерієм песимізму-оптимізму Гурвіца, якщо $\lambda = 0,4$?

Розв'язання

Показниками ефективності для кожної зі стратегій є

$$H_1 = 0,4 \cdot 15 + 0,6 \cdot (-8) = 6 - 4,8 = 1,2.$$

$$H_2 = 0,4 \cdot 20 + 0,6 \cdot (-10) = 8 - 6 = 2.$$

$$H_3 = 0,4 \cdot 7 + 0,6 \cdot (-4) = 2,8 - 2,4 = 0,4.$$

Звідси H_2 є максимальним. Отже, за критерієм Гурвіца A_2 – це оптимальна стратегія.

Задача 2.19. Можливе будівництво чотирьох типів гідроелектростанцій: A_1 – дериваційних, A_2 – акумулюючих, A_3 – хвильових, A_4 – приливних. Ефективність кожного з типів залежить від різних факторів: режиму річок, вартості палива, його перевезення тощо. Припустимо, що виділено чотири різні стани системи, кожне з яких означає певне поєднання факторів, що впливають на ефективність енергетичних об'єктів. Економічна ефективність будівництва окремих типів електростанцій змінюється в залежності від станів системи та задається матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 8 & 9 & 3 & 2 \\ 4 & 12 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

Який тип електростанції слід побудувати за критерієм Севіджа?

Розв'язання

Для застосування критерію Севіджа спочатку побудуємо матрицю ризиків.

$$R = \begin{pmatrix} 8-5 & 12-2 & 10-8 & 8-1 \\ 8-2 & 12-3 & 10-5 & 8-8 \\ 8-8 & 12-9 & 10-3 & 8-2 \\ 8-4 & 12-12 & 10-10 & 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 2 & 7 \\ 6 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \max_{1 \leq j \leq n} r_{1j} = 10 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{2j} = 9 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{3j} = 7 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{4j} = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow S = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} = 4.$$

Отже, за критерієм Севіджа відповідно до отриманих значень оптимальною є стратегія A_4 – побудувати припливні ГЕС.

III. Заклучна частина

6. Підведення підсумків

Закінчіть речення:

- Я познайомився з ...
- Було не просто ...
- У мене вийшло ...
- Мені запам'яталось ...

2.2.6. Заняття 13 з теми «Розв'язування задач за допомогою критеріїв»

Мета:

- *навчальна:* набуття практичних навичок знаходження оптимальної стратегії в умовах ризику та повної невизначеності, застосовуючи відповідні критерії;
- *розвивальна:* розвивати уміння застосовувати отримані знання та навички, формувати науковий світогляд;
- *виховна:* виховувати акуратність, охайність ведення записів, наполегливість, активність.

Тип заняття: відпрацювання вмінь і навичок.

Обладнання: конспект, картки із завданнями.

Хід заняття

I. Вступна частина

1. Організаційний момент

Вітання з учнями. Перевірка готовності гуртківців до заняття. Перевірка присутності.

2. Актуалізація опорних знань

Установіть відповідність.

Критерій		Формула
1. Максимінний критерій Вальда	А.	$\overline{a_{io}} = \max_{1 \leq i \leq m} \overline{a_i} = \max_{1 \leq i \leq m} (p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in})$
2. Критерій максимакса	Б.	$P = \max_{1 \leq i \leq m} P_i = \max_{1 \leq i \leq m} (a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \dots \cdot a_{in})$
3. Критерій добутоків в умовах повної невизначеності	В.	$H_A = \max_{1 \leq i \leq m} \{ \lambda \max_j a_{ij} + (1 - \lambda) \min_j a_{ij} \} = \max_{1 \leq i \leq m} H_i$
4. Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца	Г.	$S = \min_i \max_j r_{ij}$
5. Критерій мінімаксного ризику Севіджа	Д.	$W = \max_{1 \leq i \leq n} \min_{1 \leq j \leq m} a_{ij}$
6. Критерій Байеса	Е.	$M = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$
7. Критерій Лапласа	Ж.	$GW = \max_{1 \leq i \leq m} GW_i = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} p_j a_{ij}$
8. Критерій Ходжа-Лемана	З.	$HL = \max_{1 \leq i \leq m} \{ (1 - h) \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} + h(p_1 a_{i1} + p_2 a_{i2} + \dots + p_n a_{in}) \} = \max_{1 \leq i \leq m} HL_i$
9. Критерій Гермесера	И.	$\overline{a_{io}} = \max_{1 \leq i \leq m} \overline{a_i} = \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{1}{n} \cdot (a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{ij} + \dots + a_{in}) \right\}$

Відповідь:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Д	Е	Б	В	Г	А	И	З	Ж

3. Повідомлення теми, мети, завдань заняття. Мотивація

Темою нашого сьогоднішнього заняття є: «Розв'язування задач за допомогою критеріїв». А метою нашого заняття є набуття практичних навичок знаходження оптимальної стратегії в умовах ризику та повної невизначеності, застосовуючи відповідні критерії.

Розшифруйте записану формулу уроку:

$$(V+O)(B+C)P=3$$

У – увага, О – організованість, В – взаємодопомога, С – спілкування, Р – робота, З – знання. Саме ці якості потрібні будуть нам на занятті.

II. Основна частина

4. Формування вмінь і навичок

Задача 2.20. На фізико-математичному факультеті є студент, який зазвичай отримує хороші оцінки. Це стається передусім через те, що у ніч перед іспитом він може повторити необхідний матеріал. Однак перед одним із іспитів студент зіткнувся з проблемою, яка полягала в тому, що його однокурсники організували вечірку на всю ніч. У нього є три стратегії:

A_1 – піти на вечірку і бути там всю ніч;

A_2 – відвідати половину вечірки, а іншу частину ночі готуватися до іспиту;

A_3 – проігнорувати вечірку та готуватися.

Іспит може бути або легким, або середньої складності, або важким. Залежно від того, якої складності буде іспит і часу, який студент витратить на повторення, можна чекати такі бали:

$$A = \begin{pmatrix} 85 & 70 & 50 \\ 93 & 80 & 87 \\ 100 & 89 & 84 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть, користуючись усіма критеріями для даного типу задач, оптимальну стратегію для студента, якщо:

- $\lambda = 0,7$;
- $h = 0,6$;

- імовірність станів природи рівні 0,1; 0,5; 0,4.

Розв'язання

1. Критерій Байеса.

Обчислимо середні виграші.

$$\bar{a}_1 = 85 \cdot 0,1 + 70 \cdot 0,5 + 50 \cdot 0,4 = 8,5 + 35 + 20 = 63,5.$$

$$\bar{a}_2 = 93 \cdot 0,1 + 80 \cdot 0,5 + 87 \cdot 0,4 = 9,3 + 40 + 34,8 = 84,1.$$

$$\bar{a}_3 = 100 \cdot 0,1 + 89 \cdot 0,5 + 84 \cdot 0,4 = 10 + 44,5 + 33,6 = 88,1.$$

$\bar{a}_3$ – максимальний середній виграш.

Отже, стратегія A_3 оптимальна за критерієм Байеса, тобто у цьому випадку студент отримає найбільший виграш – 88,1.

2. Критерій Лапласа.

Нехай $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Тоді

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{1}{3} \cdot (85 + 70 + 50) = \frac{1}{3} \cdot 205 = 68\frac{1}{3} \\ \bar{a}_2 &= \frac{1}{3} \cdot (93 + 80 + 87) = \frac{1}{3} \cdot 260 = 86\frac{2}{3} \\ \bar{a}_3 &= \frac{1}{3} \cdot (100 + 89 + 84) = \frac{1}{3} \cdot 273 = 91 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \bar{a}_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq m} \bar{a}_i = \bar{a}_3.$$

Тоді відповідно до критерію Лапласа оптимальною буде реалізація стратегії A_3 , тобто студент отримає максимальний бал, якщо відмовиться від вечірки.

3. Критерій Ходжа-Лемана.

Обчислимо показники ефективності

$$HL_1 = (1 - 0,6) \cdot 50 + 0,6 \cdot 63,5 = 0,4 \cdot 50 + 38,1 = 20 + 38,1 = 58,1.$$

$$HL_2 = (1 - 0,6) \cdot 80 + 0,6 \cdot 84,1 = 0,4 \cdot 80 + 50,46 = 32 + 50,46 = 82,46.$$

$$HL_3 = (1 - 0,6) \cdot 84 + 0,6 \cdot 88,1 = 0,4 \cdot 84 + 52,86 = 33,6 + 52,86 = 86,46.$$

Звідси $HL = \max HL_i = HL_3 = 86,46$, тоді за критерієм Ходжа-Лемана A_3 – проігнорувати вечірку і готуватися – оптимальна стратегія.

4. Критерій Геймеєра.

Матриця Геймеєра має наступний вигляд

$$G = \begin{pmatrix} 85 \cdot 0,1 & 70 \cdot 0,5 & 50 \cdot 0,4 \\ 93 \cdot 0,1 & 80 \cdot 0,5 & 87 \cdot 0,4 \\ 100 \cdot 0,1 & 89 \cdot 0,5 & 84 \cdot 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8,5 & 35 & 20 \\ 9,3 & 40 & 34,8 \\ 10 & 44,5 & 33,6 \end{pmatrix}.$$

$$GW = \max GW_i = \max \{8,5; 9,3; 10\} = 10.$$

Отже, за критерієм Геймеєра оптимальною стратегією є ігнорування вечірки і підготовка до іспиту – A_3 , тобто незалежно від станів природи студент отримає виграш не менше 10.

5. Максимінний критерій Вальда.

Для стратегій A_1, A_2, A_3 мінімальними W_i відповідно є:

$$W_1 = \min_{1 \leq j \leq n} a_{1j} = 50;$$

$$W_2 = \min_{1 \leq j \leq n} a_{2j} = 80;$$

$$W_3 = \min_{1 \leq j \leq n} a_{3j} = 84.$$

Знайдемо серед отриманих W_i максимальне

$$W = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \max \{50, 80, 84\} = 84.$$

Отже, за критерієм Вальда оптимальною є стратегія A_3 – проігнорувати вечірку та готуватися до іспиту, тобто студент незалежно від варіантів ситуації отримає виграш не менше 84.

6. Критерій максимакса.

Показники ефективності стратегій A_1, A_2, A_3 відповідно рівні

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{1j} = 85;$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{2j} = 93;$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{3j} = 100.$$

Знайдемо серед отриманих показників максимальне

$$M = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \max \{85, 93, 100\} = 100.$$

Можемо зробити висновок, що за критерієм максимакса найбільш сприятливою стратегією для студента буде не піти на вечірку та готуватися до іспиту (A_3), тобто вибір даного розв'язку максимізує максимальні виграші для кожного стану природи.

7. Критерій добутків.

Для застосування критерію добутоків упевнимися в тому, що $a_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Дана умова виконується, тому ми можемо використати цей критерій.

Порахуємо добутки по рядках за формулою $P_i = a_{i1} \cdot a_{i2} \cdot \dots \cdot a_{in}$:

$$P_1 = 85 \cdot 70 \cdot 50 = 297500;$$

$$P_2 = 93 \cdot 80 \cdot 87 = 647280;$$

$$P_3 = 100 \cdot 89 \cdot 84 = 747600.$$

Звідси $\max_i P_i = P_3$, то A_3 – проігнорувати вечірку і готуватися – це оптимальна стратегія для студента в даній ситуації, тобто студент отримає найбільший виграш, якщо врахує і появу інших можливих гірших ситуацій.

8. Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца.

Відповідно до критерію Гурвіца знайдемо показники ефективності кожної стратегії, якщо $\lambda = 0,7$,

$$H_1 = \lambda \cdot \max\{85, 70, 50\} + (1 - \lambda) \cdot \min\{85, 70, 50\} = 0,7 \cdot 85 + 0,3 \cdot 50 = 59,5 + 15 = 74,5;$$

$$H_2 = \lambda \cdot \max\{93, 80, 87\} + (1 - \lambda) \cdot \min\{93, 80, 87\} = 0,7 \cdot 93 + 0,3 \cdot 80 = 65,1 + 24 = 89,1;$$

$$H_3 = \lambda \cdot \max\{100, 89, 84\} + (1 - \lambda) \cdot \min\{100, 89, 84\} = 0,7 \cdot 100 + 0,3 \cdot 84 = 70 + 25,2 = 95,2.$$

Максимальним серед отриманих значень є H_3 , який відповідає стратегії A_3 – проігнорувати вечірку та готуватися до іспиту, і відповідно є оптимальною за критерієм песимізму-оптимізму Гурвіца, тобто студент отримає максимальний виграш, якщо врахує і найгірший, і найкращий стани природи.

9. Критерій мінімаксного ризику Севіджа.

Матриця ризиків має наступний вигляд

$$R = \begin{pmatrix} 100-85 & 89-70 & 87-50 \\ 100-93 & 89-80 & 87-87 \\ 100-100 & 89-89 & 87-84 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 19 & 37 \\ 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Відповідно до критерію Севіджа маємо

$$\left. \begin{array}{l} \max_{1 \leq j \leq n} r_{1j} = 37 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{2j} = 9 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{3j} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow S = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} = 3.$$

Отже, за критерієм мінімаксного ризику Севіджа стратегія A_3 –

проігнорувати вечірку та готуватися до іспиту – є оптимальною. Тобто якщо обрати дану тактику, то втрати максимальні студента за різних варіантів умов виявляться мінімальними.

Таким чином, ми отримали, що за усіма критеріями оптимальною стратегією є тільки одна A_3 – не піти на вечірку і готуватися.

Задача 2.21. У деякому місті працюють 5 банків A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , в кожен із яких Місіс Y може вкласти свої гроші. Вона може отримати свої гроші N_1 – через місяць, N_2 – через 2 місяці, N_3 – через 3 місяці, N_4 – через 4 місяці.

У таблиці 2.8 представлено прибуток Місіс Y від вкладу.

У Місіс Y є борг 50\$. Кожен наступний місяць після N_1 до даної суми нараховують ще 10% боргу. Місіс Y не знає, коли зможе отримати гроші, але їй необхідно допомогти обрати серед переліку банків один.

Знайти оптимальну стратегію для Місіс Y, якщо:

- коефіцієнт песимізму $\lambda = 0,6$;
- показник ступеня довіри $h = 0,2$;
- імовірності станів природи рівні 0,2; 0,3; 0,3; 0,2.

Таблиця 2.8. Прибуток Місіс Y

Природа Банк	N_1	N_2	N_3	N_4
A_1	50	60	70	80
A_2	60	40	70	70
A_3	40	70	50	60
A_4	50	50	80	80
A_5	50	40	60	90

Розв'язання

Дана гра статистична і має двох гравців:

- 1-й гравець – Місіс Y (вкладник). Її можливі стратегії:
 - A_1 – вкласти гроші в перший банк;
 - A_2 – вкласти гроші в другий банк;

- A_3 – вкласти гроші в третій банк;
- A_4 – вкласти гроші в четвертий банк;
- A_5 – вкласти гроші в п'ятий банк.
- 2-й гравець – природа (банк). Можливі стани природи:
 - N_1 – видати гроші через місяць;
 - N_2 – видати гроші через 2 місяці;
 - N_3 – видати гроші через 3 місяці;
 - N_4 – видати гроші через 4 місяці.

Згідно з умовою задачі у Місіс У є борг 50\$ і кожен наступний місяць після N_1 до суми прибутку, яка вона могла б отримати, нараховують ще 10% боргу. Тому:

- 1) 10% від 50\$ – 5\$, тобто борг становить $50 + 5 = 55$ \$ на N_2 .
- 2) 10% від 55\$ – 5,5\$, тобто треба нарахувати $55 + 5,5 = 60,5$ \$ боргу на N_3 .
- 3) 10% від 60,5\$ – 6,05\$, тобто у цьому випадку борг становить $60,5 + 6,05 = 66,55$ \$ на N_4 .

Відповідно до отриманих розрахунків, платіжна матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 60 - 55 & 70 - 60,5 & 80 - 66,55 \\ 60 & 40 - 55 & 70 - 60,5 & 70 - 66,55 \\ 40 & 70 - 55 & 50 - 60,5 & 60 - 66,55 \\ 50 & 50 - 55 & 80 - 60,5 & 80 - 66,55 \\ 50 & 40 - 55 & 60 - 60,5 & 90 - 66,55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 5 & 9,5 & 13,45 \\ 60 & -15 & 9,5 & 3,45 \\ 40 & 15 & -10,5 & -6,55 \\ 50 & -5 & 19,5 & 13,45 \\ 50 & -15 & -0,5 & 23,45 \end{pmatrix}.$$

1. Критерій Байеса.

$$\overline{a_1} = 50 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,3 + 9,5 \cdot 0,3 + 13,45 \cdot 0,2 = 10 + 1,5 + 2,85 + 2,69 = 17,04.$$

$$\overline{a_2} = 60 \cdot 0,2 - 15 \cdot 0,3 + 9,5 \cdot 0,3 + 3,45 \cdot 0,2 = 12 - 4,5 + 2,85 + 0,69 = 11,04.$$

$$\overline{a_3} = 40 \cdot 0,2 + 15 \cdot 0,3 - 10,5 \cdot 0,3 - 6,55 \cdot 0,2 = 8 + 4,5 - 3,15 - 1,31 = 8,04.$$

$$\overline{a_4} = 50 \cdot 0,2 - 5 \cdot 0,3 + 19,5 \cdot 0,3 + 13,45 \cdot 0,2 = 10 - 1,5 + 5,85 + 2,69 = 17,04.$$

$$\overline{a_5} = 50 \cdot 0,2 - 15 \cdot 0,3 - 0,5 \cdot 0,3 + 23,45 \cdot 0,2 = 10 - 4,5 - 0,15 + 4,69 = 10,04.$$

$\overline{a_1}$ і $\overline{a_4}$ – максимальні середні виграші.

Отже, як стратегія A_1 , так і стратегія A_4 є оптимальними за критерієм Байеса, тобто у цих випадках Місіс У отримає найбільший виграш (17,04).

2. Критерій Лапласа.

Нехай $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \frac{1}{5}$. Застосуємо критерій Лапласа:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{5} \cdot (50 + 5 + 9,5 + 13,45) = \frac{1}{5} \cdot 77,95 = 15,59.$$

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{5} \cdot (60 - 15 + 9,5 + 3,45) = \frac{1}{5} \cdot 57,95 = 11,59.$$

$$\bar{a}_3 = \frac{1}{5} \cdot (40 + 15 - 10,5 - 6,55) = \frac{1}{5} \cdot 37,95 = 7,59.$$

$$\bar{a}_4 = \frac{1}{5} \cdot (50 - 5 + 19,5 + 13,45) = \frac{1}{5} \cdot 77,95 = 15,59.$$

$$\bar{a}_5 = \frac{1}{5} \cdot (50 - 15 - 0,5 + 23,45) = \frac{1}{5} \cdot 57,95 = 11,59.$$

Серед отриманих показників ефективності найбільші $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_4$. Тоді відповідно до критерію Лапласа оптимальною буде реалізація стратегій A_1 та A_4 , тобто Місіс У отримає максимальний прибуток від вкладу грошей у перший або четвертий банк.

3. Критерій Ходжа-Лемана.

Показник ефективності кожної зі стратегій дорівнюватиме:

$$HL_1 = (1 - 0,2) \cdot 5 + 0,2 \cdot 17,04 = 0,8 \cdot 5 + 3,408 = 4 + 3,408 = 7,408.$$

$$HL_2 = (1 - 0,2) \cdot (-15) + 0,2 \cdot 11,04 = 0,8 \cdot (-15) + 2,208 = -12 + 2,208 = -9,792.$$

$$HL_3 = (1 - 0,2) \cdot (-10,5) + 0,2 \cdot 8,04 = 0,8 \cdot (-10,5) + 1,608 = -8,4 + 1,608 = -6,792.$$

$$HL_4 = (1 - 0,2) \cdot (-5) + 0,2 \cdot 17,04 = 0,8 \cdot (-5) + 3,408 = -4 + 3,408 = -0,592.$$

$$HL_5 = (1 - 0,2) \cdot (-15) + 0,2 \cdot 10,04 = 0,8 \cdot (-15) + 2,008 = -12 + 2,008 = -9,992.$$

$HL_1 = 7,408$ – найбільше серед отриманих значень, тобто це. Звідси A_1 – це оптимальна стратегія для даної ситуації за критерієм Ходжа-Лемана.

4. Критерій Геймеєра.

Матриця Гермейєра має вигляд

$$G = \begin{pmatrix} 50 \cdot 0,2 & 5 \cdot 0,3 & 9,5 \cdot 0,3 & 13,45 \cdot 0,2 \\ 60 \cdot 0,2 & -15 \cdot 0,3 & 9,5 \cdot 0,3 & 3,45 \cdot 0,2 \\ 40 \cdot 0,2 & 15 \cdot 0,3 & -10,5 \cdot 0,3 & -6,55 \cdot 0,2 \\ 50 \cdot 0,2 & -5 \cdot 0,3 & 19,5 \cdot 0,3 & 13,45 \cdot 0,2 \\ 50 \cdot 0,2 & -15 \cdot 0,3 & -0,5 \cdot 0,3 & 23,45 \cdot 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1,5 & 2,85 & 2,69 \\ 12 & -4,5 & 2,85 & 0,69 \\ 8 & 4,5 & -3,15 & -1,31 \\ 10 & -1,5 & 5,85 & 2,69 \\ 10 & -4,5 & -0,15 & 4,69 \end{pmatrix}.$$

$$GW_1 = 1,5;$$

$$GW_2 = -4,5;$$

$$GW_3 = -3,15;$$

$$GW_4 = -1,5;$$

$$GW_5 = -4,5.$$

$GW_1 = 1,5$ – максимальне серед отриманих значень. Тому за критерієм Геймеєра стратегія A_1 є оптимальною. Тобто Місіс У незалежно від можливих станів природи отримає виграш не менше 1,5.

5. Максимінний критерій Вальда.

Мінімальними показниками ефективності W_i для кожної стратегії будуть:

$$W_1 = 5; W_2 = -15; W_3 = -10,5; W_4 = -5; W_5 = -15.$$

Серед усіх показників ефективності оберемо найбільше, тобто

$$W = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = W_1 = 5.$$

Отже, за критерієм Вальда оптимальною стратегією є A_1 . Тобто Місіс У незалежно від можливих станів природи отримає виграш не менше 5.

6. Критерій максимакса.

$$\begin{array}{l} \max_{1 \leq j \leq n} a_{1j} = 50 \\ \max_{1 \leq j \leq n} a_{2j} = 60 \\ \max_{1 \leq j \leq n} a_{3j} = 40 \\ \max_{1 \leq j \leq n} a_{4j} = 50 \\ \max_{1 \leq j \leq n} a_{5j} = 50 \end{array} \Rightarrow M = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = 60.$$

Отже, відповідно до критерію максимакса оптимальною стратегією є A_2 , тобто вибір даного розв'язку максимізує максимальні виграші (прибуток) для кожного стану природи.

7. Критерій добутків в умовах повної невизначеності.

Перевіримо виконання умови $a_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Дана умова не

виконується, тому виконаємо зсув на $b = |\min a_{ij}| + 1 = |-15| + 1 = 16$. Тоді платіжна матриця має вигляд

$$A' = \begin{pmatrix} 16+50 & 16+5 & 16+9,5 & 16+13,45 \\ 16+60 & 16+(-15) & 16+9,5 & 16+3,45 \\ 16+40 & 16+15 & 16-10,5 & 16-6,55 \\ 16+50 & 16-5 & 16+19,5 & 16+13,45 \\ 16+50 & 16-15 & 16-0,5 & 16+23,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 66 & 21 & 25,8 & 29,45 \\ 76 & 1 & 25,8 & 19,45 \\ 56 & 31 & 5,5 & 9,45 \\ 66 & 11 & 35,5 & 29,45 \\ 66 & 1 & 15,5 & 39,45 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо добутки по рядках:

$$P_1 = 66 \cdot 21 \cdot 25,8 \cdot 29,45 = 105309666;$$

$$P_2 = 76 \cdot 1 \cdot 25,8 \cdot 19,45 = 3813756;$$

$$P_3 = 56 \cdot 31 \cdot 5,5 \cdot 9,45 = 902286;$$

$$P_4 = 66 \cdot 11 \cdot 35,5 \cdot 29,45 = 75901485;$$

$$P_5 = 66 \cdot 1 \cdot 15,5 \cdot 39,45 = 4035735.$$

$P = \max P_i = P_1$ – максимальне значення серед отриманих. Тобто Місіс Y отримає найбільший виграш, якщо врахує і появу інших можливих гірших ситуацій.

Отже, за критерієм добутків оптимальною стратегією є A_1 .

8. Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца.

Обчислимо показниками ефективності для кожної стратегії

$$H_1 = 0,6 \cdot 50 + (1 - 0,6) \cdot 5 = 30 + 2 = 32;$$

$$H_2 = 0,6 \cdot 60 + (1 - 0,6) \cdot (-15) = 36 - 6 = 30;$$

$$H_3 = 0,6 \cdot 40 + (1 - 0,6) \cdot (-10,5) = 24 - 4,2 = 19,8;$$

$$H_4 = 0,6 \cdot 50 + (1 - 0,6) \cdot (-5) = 30 - 2 = 28;$$

$$H_5 = 0,6 \cdot 50 + (1 - 0,6) \cdot (-15) = 30 - 6 = 24.$$

H_1 – це максимальний показник ефективності, тому стратегія A_1 є оптимальною за даним критерієм, тобто у цьому випадку Місіс Y отримає максимальний виграш, якщо врахує і найгірший, і найкращий стани природи.

9. Критерій мінімаксного ризику Севіджа.

Складемо матрицю ризиків

$$R = \begin{pmatrix} 60-50 & 15-5 & 19,5-9,5 & 23,45-13,45 \\ 60-60 & 15-(-15) & 19,5-9,5 & 23,45-3,45 \\ 60-40 & 15-15 & 19,5+10,5 & 23,45+6,55 \\ 60-50 & 15-(-5) & 19,5-19,5 & 23,45-13,45 \\ 60-50 & 15-(-15) & 19,5+0,5 & 23,45-23,45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 30 & 10 & 20 \\ 20 & 0 & 30 & 30 \\ 10 & 20 & 0 & 10 \\ 10 & 30 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із матриці ризиків отримаємо

$$\begin{array}{l} \max_{1 \leq j \leq n} r_{1j} = 10 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{2j} = 30 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{3j} = 30 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{4j} = 20 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{5j} = 30 \end{array} \Rightarrow S = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} = 10.$$

Звідси, за критерієм Севіджа A_1 – оптимальна стратегія. Тобто якщо обрати дану тактику, то втрати максимальні Місіс Y за різних варіантів умов виявляться мінімальними.

Отже, ми отримали, що:

- стратегія A_1 оптимальна 7 разів;
- стратегія A_2 оптимальна 1 раз;
- стратегія A_3 оптимальна 0 разів;
- стратегія A_4 оптимальна 2 рази;
- стратегія A_5 оптимальна 0 разів.

Тому можна зробити висновок про те, що застосування стратегії A_1 – вкласти гроші в перший банк – найбільш вигідно. Але остаточне рішення залежить від схильності до ризику особи, яка його приймає. Отже, можемо зробити висновок, що пошук оптимального розв'язку проблеми залежить від того, який критерій для цього буде використано.

III. Заключна частина

5. Підведення підсумків

Дискусія на тему «Чи потрібні мені знання, які я отримав?».

ВИСНОВКИ

Позакласна робота з математики дозволяє школярам безпосередньо ознайомитися з багатьма цікавими можливостями математики та розширити власні знання. Водночас гуртки допомагають у розвитку вміння пов'язувати знання з математики з повсякденним життям. Розвиток сучасної математичної думки дозволяє осучаснити зміст гурткової роботи з математики, наприклад, через застосування елементів теорії ігор.

У роботі розроблено систему занять для запланованого гуртка. В результаті аналізу методичної, педагогічної та психологічної літератури складено вимоги до організації та діяльності форм позакласної роботи з математики, яка у формі гурткової діяльності має велике виховне значення, оскільки мета її не лише у тому, щоб висвітлити якесь вузьке питання, а й у тому, щоб зацікавити учнів предметом, залучити їх до серйозної самостійної роботи, що задовольняє психологічним особливостям підлітків, їх зростаючими пізнавальними інтересами. Велику увагу приділено зв'язку вивчення математики та розвитку інтересів школярів. У розробленому гуртку розглянуті різні методи розв'язування завдань з теорії ігор. На заняттях наведено як теоретичну частину, так і практичну, де наведено велику кількість задач.

Описані у гуртку методи розбору ігор визначення виграшних стратегій базуються на шкільному курсі математики, але розширюють можливості школярів, перетворюючи нові їм технічні прийоми на звичні, часто використовувані. Розроблений гурток може допомогти учням поглибити свої знання з математики та теорії ймовірностей.

Крім запропонованих тем, під час позакласної роботи можна розглядати й інші, що стосуються теорії ігор, зокрема, алгоритм Гейла-Шеплі, парадокси, пов'язані з рухом на дорогах, задачі комівояжера.

Дана кваліфікаційна робота буде цікава студентам, що вивчають методику навчання математики, методи оптимізації, вчителям, що прагнуть осучаснити свої знання та урізноманітнити матеріал для позакласної роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. OECD (2019), PISA 2018 Results (Volume 1): What Students Know and Can Do, PISA, OECD Publishing, Paris. URL: <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>.
2. Багрій Н. І., Литовченко З. М. Експерсії з математики. *Початкова школа: щомісячний наук.-метод. журнал*. 1999. № 1. С. 41-43.
3. Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков. Пособие для учителей. М: Просвещение, 1971. 462 с.
4. Бахрушин В. Математика у PISA-2018: результати і висновки. URL: <https://nus.org.ua/articles/matematyka-u-pisa-2018-rezultaty-i-vysnovky/>.
5. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навчальний посібник. 3-тє видання, перероблене і доповнене. К: Вища школа, 1989. 367 с.
6. Волощина В. В. Математичне моделювання як дидактичний засіб розвитку в учнів наукового світогляду. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс - 2012»*. Суми: ВВП «Мрія» ТОВ, 2012. С. 31-32.
7. Волошин О. Ф., Машенко С. О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. Київ: Вид.-поліг. Центр «Київ. ун-т», 2010. 336 с.
8. Воробьев Н. Н. Теория игр. Лекции для экономистов-кибернетиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1974. 160 с.
9. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник. Київ: Либідь, 1997. 374 с.
10. Давыдов Э. Г. Методы и модели теории антагонистических игр. М.: Изд-во МГУ, 1978. с. 135.
11. Данскин Дж. М. Теория максимина. М.: Сов. радио, 1970. с. 126.
12. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения / пер. с англ. М.: Мир, 1971. 491 с.
13. Державний стандарт базової середньої освіти. URL:

<https://www.kmu.gov.ua/npas/pro-deyaki-pitannya-derzhavnih-standartiv-povnoyi-zagalnoyi-serednoyi-osviti-i300920-898>.

14. Десять запитань від учителів математики... і як PISA може допомогти відповісти на них / перекл. з англ.; Український центр якості освіти. Київ: УЦОЯО, 2019. 82 с.

15. Деуолофеу Х. Мир математики. Дилемма заключенного и доминантные стратеги. М.: Де Агостини, 2014. Т. 8. 148 с.

16. Донець Л. І. Економічні ризики та методи їх вимірювання: Навчальний посібник. К.: Центр навчальної літератури, 2006. 312 с.

17. Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике: Учебник. 3-е изд., перераб. М.: «Дело и сервис», 2001. 368 с.

18. Захарченко Т. Роль математичних гуртків у формуванні математичної компетентності. II Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2021 Форум молодих дослідників». 12 листопада 2021 р. Суми. С. 49-51.

19. Захарченко Т. Використання елементів теорії ігор у гуртковій роботі з математики. Студентська звітна конференція: Матеріали результатів наукових досліджень молодих науковців. Суми: Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2022. Випуск 16. С. 24-25.

20. Захарченко Т. Деякі історичні постаті в теорії ігор. *Історія науки – майбутньому вчителів ' 2022 «Тенденції розвитку природничо-математичних наук і освіти 19-20 ст.»: Всеукраїнська студ. наук.-практ. конф., 26 травня 2022 р.: (зб. матеріалів) / МОН України, Уманський держ. пед. ун-т імені Павла Тичини, Нац. пед.. ун-т імені М.П. Драгоманова [та ін.]; [редкол.: Т.В. Поліщук (голов. ред.), Т.Л. Годованюк, Т.М. Махомета, [та ін.]. – Умань, 2022]. С. 30-32.*

21. Захарченко Т. До питання оновлення змісту гурткової роботи за допомогою елементів теорії ігор. *III Всеукраїнська науково-методична інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ITM*плюс-2022 Форум молодих дослідників»*. 18 листопада 2022 р. Суми. С. 31-32

22. Катеринюк Г. Д. Педагогічні умови формування та розвитку здатності до математичного моделювання. *Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору*. К.: Гнозис, 2016. С. 239-246.

23. Кини Р. Л., Райфа Х. Принятие решений по многим критериям: Предпочтения и замещения / пер. с англ. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.

24. Кисельова К. PISA: усе, що треба знати про глобальне дослідження освіти. URL: <https://osvitoria.media/experience/pisa-use-shho-treba-znaty-pro-globalne-doslidzhennya-osvity/>.

25. Коба В. І., Хмура О. О. Позакласна робота з математики в школі. К.: Радянська школа, 1968. 380 с.

26. Колягин Ю. М. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. Москва: Просвещение, 1975. 462 с.

27. Методичний путівник керівника гуртка сучасної школи та позашкільця. Частина 1. / Укладач С. Б. Пітко. Львів: ЛОІППО, 2019. 35 с.

28. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений: Пер. с нем. М.: Мир, 1990, 208 с.

29. Навчальні програми для 10-11 класів. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv>.

30. Навчальні програми для 5-9 класів. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas>.

31. Нова українська школа. URL: <https://mon.gov.ua/ua/tag/nova->

[ukrainska-shkola.](https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf)

32. Нова українська школа. Концептуальні засади реформування середньої школи. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/nova-ukrainska-shkola-compressed.pdf>.

33. Овчаренко С. А. Позаурочні форми роботи з математики як ефективний засіб розвитку творчих здібностей учнів. *Педагогічний вісник: науково-методичний щоквартальний журнал*. Кропивницький: ФОП «Питльована О. А.», 2021. № 1-2 (55-56). С. 45-48.

34. Одінцева О. О., Кіблицька О., Захарченко Т. До питання використання елементів теорії ігор в гуртковій роботі з математики. *Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*. Випуск 20.

35. Одінцева О. О., Кудлай А. Б. Про алгоритм Гейла-Шеплі та можливості його використання в позакласній роботі з математики. *Збірник наукових праць «Актуальні питання природничо-математичної освіти»*. Випуск 2(16). Суми, 2020. С. 101-108.

36. Остапчук У. План роботи гуртка з математики в 5-11 класах. *Математика в школі: наук.-метод. журнал*. 2005. №1. С. 16–21.

37. Офіційний звіт про проведення в 2021 році зовнішнього незалежного оцінювання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 1. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT-ZNO_2021-Tom_1_-1.pdf.

38. Офіційний звіт про проведення в 2021 році зовнішнього незалежного оцінювання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти. Том 2. URL: https://testportal.gov.ua/wp-content/uploads/2021/11/ZVIT_ZNO_2021-Tom_2_.pdf.

39. Панченко Л. Л. Про понятійний апарат математичного моделювання в загальноосвітній школі та педагогічному вузі. *Науковий часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі*. К.: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2004. № 1. С.89-97.

40. Петросян Л.А., Зенкевич Н. А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. с. 96.
41. Пікуль Л. Ф. Математична олімпіада. *Початкова школа: щомісячний наук.-метод. журнал*. 1990. №3. С. 23–25.
42. Положення про Всеукраїнські учнівські олімпіади, турніри, конкурси з навчальних предметів, конкурси-захисти науково-дослідницьких робіт, олімпіади зі спеціальних дисциплін та конкурси фахової майстерності. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1318-11#Text>.
43. Програма ЗНО з математики. URL: <https://testportal.gov.ua/progmach/>
44. Ріжняк Р. Я., Кушнір В.А. Лабораторний практикум з методики навчання математики: Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2013. 224 с.
45. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. Вузів. К.: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
46. Терешин Н. А. Прикладная направленность школьного курса математики. М.: Просвещение, 1990. 96 с.
47. Фарков А. В. Математические кружки в школе. 5-8 классы. 3-е изд. М.: Айрис-пресс, 2007. 144 с.
48. Фіцула М. М. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних закладів освіти. К.: Видавничий центр «Академія», 2002. 528 с.
49. Шапкин А. С., Шапкин В. А. Теория риска и моделирование рискованных ситуаций: Учебник. М.: Дашков и К°, 2005. 880 с.
50. Шикин Е.В. От игр к играм. Математическое введение. Изд. 2-е, исправл. М.: Едиториал УРСС, 2003. 112 с.

Додаток

Задачі, які можна використовувати на заняттях 14-15

Задача 2.22. Приватна фірма виготовляє косметичну продукцію. Протягом місяця вони можуть виготовити $B_1=15$, $B_2=16$, $B_3=17$ коробок деякої продукції, кількість яких залежить від попиту, який може становити 15, 16, 17 коробок. Від продажу кожної коробки фірма отримує $c_1=10$ тис. грн. Косметичні товари мають невеликий термін придатності. Якщо коробку не купують протягом місяця, то вона має бути знищена і фірма отримує збитки $c_2=6$ тис. грн. За кожну незадоволену одиницю попиту фірма втрачає по одному клієнту. Якщо фірма все-таки втрачає клієнта, то збитки становлять $c_3=4$ тис. грн.

Визначити оптимальну стратегію поведінки фірми, якщо:

- коефіцієнт песимізму $\lambda=0,7$;
- показник ступеня довіри $h=0,4$;
- імовірності станів природи рівні 0,2; 0,5; 0,3.

Розв'язання

Дана гра є статистичною, де 1 гравець – фірма, а 2 гравець – природа (ринок).

Розглянемо можливі стратегії для фірми:

A_1 – виготовити 15 коробок продукції;

A_2 – виготовити 16 коробок продукції;

A_3 – виготовити 17 коробок продукції.

Для природи можливі стани:

N_1 – попит становить 15 коробок;

N_2 – попит становить 16 коробок;

N_3 – попит становить 17 коробок.

Аби скласти платіжну матрицю, необхідно порахувати прибуток при

різних комбінаціях попиту і пропозиції:

- якщо попит менший або рівний пропозиції, то прибуток обчислюємо за формулою

$$N_j \cdot (c_1 - c_2) - (A_i - N_j) \cdot c_2;$$

- якщо попит більше пропозиції, то прибуток обчислюємо за формулою

$$A_i \cdot (c_1 - c_2) - (N_j - A_i) \cdot c_3.$$

Платіжна матриця матиме наступний вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 15 \cdot (10 - 6) - (15 - 15) \cdot 6 & 15 \cdot (10 - 6) - (16 - 15) \cdot 4 & 15 \cdot (10 - 6) - (17 - 15) \cdot 4 \\ 15 \cdot (10 - 6) - (16 - 15) \cdot 6 & 16 \cdot (10 - 6) - (16 - 16) \cdot 6 & 16 \cdot (10 - 6) - (17 - 16) \cdot 4 \\ 15 \cdot (10 - 6) - (17 - 15) \cdot 6 & 16 \cdot (10 - 6) - (17 - 16) \cdot 6 & 17 \cdot (10 - 6) - (17 - 17) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 56 & 52 \\ 54 & 64 & 60 \\ 48 & 58 & 68 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю ризиків

$$R = \begin{pmatrix} 60 - 60 & 64 - 56 & 68 - 52 \\ 60 - 54 & 64 - 64 & 68 - 60 \\ 60 - 48 & 64 - 58 & 68 - 68 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 6 & 0 & 8 \\ 12 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначимо оптимальну стратегію.

1. Критерій Байеса.

Відповідно до даного критерію маємо

$$\bar{a}_1 = 60 \cdot 0,2 + 56 \cdot 0,5 + 52 \cdot 0,3 = 12 + 28 + 15,6 = 55,6.$$

$$\bar{a}_2 = 54 \cdot 0,2 + 64 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,3 = 10,8 + 32 + 18 = 60,8.$$

$$\bar{a}_3 = 48 \cdot 0,2 + 58 \cdot 0,5 + 68 \cdot 0,3 = 9,6 + 29 + 20,4 = 59.$$

$\bar{a}_2$ – максимальний середній виграш.

Отже, стратегія A_2 – виготовити 16 коробок продукції – оптимальна за критерієм Байеса, тобто у цьому випадку фірма отримає найбільший виграш (60,8).

2. Критерій Лапласа.

Нехай $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$, тоді застосуємо критерій Лапласа:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{3} \cdot (60 + 56 + 52) = \frac{1}{3} \cdot 168 = 56.$$

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{3} \cdot (54 + 64 + 60) = \frac{1}{3} \cdot 178 = 59\frac{1}{3}.$$

$$\bar{a}_3 = \frac{1}{3} \cdot (48 + 58 + 68) = \frac{1}{3} \cdot 174 = 58.$$

Отже, оберемо серед отриманих показників ефективності найбільший, тобто $\bar{a}_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq m} \bar{a}_i = \bar{a}_2$. Тоді відповідно до критерію Лапласа оптимальною буде реалізація стратегії A_2 . Тобто фірма отримає максимальний прибуток від виробництва 16 коробок продукції.

3. Критерій Ходжа-Лемана.

Показник ефективності кожної зі стратегій дорівнюватиме:

$$HL_1 = (1 - 0,4) \cdot 52 + 0,4 \cdot (60 \cdot 0,2 + 56 \cdot 0,5 + 52 \cdot 0,3) = 0,6 \cdot 52 + 0,4 \cdot (12 + 28 + 15,6) = 31,2 + 0,4 \cdot 55,6 = 31,2 + 22,24 = 53,44.$$

$$HL_2 = (1 - 0,4) \cdot 54 + 0,4 \cdot (54 \cdot 0,2 + 64 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,3) = 0,6 \cdot 54 + 0,4 \cdot (10,8 + 32 + 18) = 32,4 + 0,4 \cdot 60,8 = 32,4 + 24,32 = 56,72.$$

$$HL_3 = (1 - 0,4) \cdot 48 + 0,4 \cdot (48 \cdot 0,2 + 58 \cdot 0,5 + 68 \cdot 0,3) = 0,6 \cdot 48 + 0,4 \cdot (9,6 + 29 + 20,4) = 28,8 + 0,4 \cdot 59 = 28,8 + 23,6 = 52,4.$$

Серед отриманих значень оберемо найбільше, тобто це $HL_2 = 56,72$. Звідси A_2 – це найбільш оптимальна стратегія для даної ситуації.

4. Критерій Геймеєра.

Складемо матрицю Гермейєра

$$G = \begin{pmatrix} 60 \cdot 0,2 & 56 \cdot 0,5 & 52 \cdot 0,3 \\ 54 \cdot 0,2 & 64 \cdot 0,5 & 60 \cdot 0,3 \\ 48 \cdot 0,2 & 58 \cdot 0,5 & 68 \cdot 0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 28 & 15,6 \\ 10,8 & 32 & 18 \\ 9,6 & 29 & 20,4 \end{pmatrix}.$$

$$\left. \begin{array}{l} GW_1 = 12 \\ GW_2 = 10,8 \\ GW_3 = 9,6 \end{array} \right\} \Rightarrow GW = \max_{1 \leq i \leq m} GW_i = GW_1.$$

Звідси за критерієм Геймеєра A_1 – виготовити 15 коробок продукції – є оптимальною. Тобто фірма незалежно від можливих станів природи отримає виграш не менше 12.

5. Максимінний критерій Вальда.

Мінімальними показниками ефективності W_i для кожної стратегії будуть:

$$W_1 = 52; W_2 = 54; W_3 = 48.$$

Серед усіх показників ефективності оберемо найбільше, тобто

$$W = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = W_2.$$

Отже, за критерієм Вальда оптимальною стратегією є A_2 . Тобто фірма незалежно від можливих станів природи отримає вигреш не менше 54.

6. Критерій максимакса.

$$\begin{array}{l} \max_{1 \leq j \leq n} a_{1j} = 60 \\ \max_{1 \leq j \leq n} a_{2j} = 64 \\ \max_{1 \leq j \leq n} a_{3j} = 68 \end{array} \Rightarrow M = \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = 68.$$

Отже, відповідно до критерію максимакса оптимальною стратегією є A_3 – виготовити 17 коробок продукції, тобто вибір даного розв'язку максимізує максимальні виграші для кожного стану природи.

7. Критерій добутків в умовах повної невизначеності.

Перевіримо виконання умови $a_{ij} > 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Дана умова виконується та ми можемо використати критерій добутків в умовах повної невизначеності.

Знайдемо добутки по рядках:

$$P_1 = 60 \cdot 56 \cdot 52 = 174720;$$

$$P_2 = 54 \cdot 64 \cdot 60 = 207360;$$

$$P_3 = 48 \cdot 58 \cdot 68 = 189312.$$

$P = \max P_i = P_2 = 207360$ – максимальне значення серед отриманих.

Отже, за критерієм добутків оптимальною стратегією є A_2 – виготовити 16 коробок продукції. Тобто фірма отримає найбільший вигреш, якщо врахує і появу інших можливих гірших ситуацій.

8. Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца.

Показниками ефективності для кожної стратегії є

$$H_1 = 0,7 \cdot 60 + 0,3 \cdot 52 = 42 + 15,6 = 57,6;$$

$$H_2 = 0,7 \cdot 64 + 0,3 \cdot 54 = 44,8 + 16,2 = 61;$$

$$H_3 = 0,7 \cdot 68 + 0,3 \cdot 48 = 47,6 + 14,4 = 62.$$

H_3 – це максимальний показник ефективності, тому стратегія A_3 є оптимальною за даним критерієм, тобто фірма отримає найбільший виграш, якщо врахує і найгірший, і найкращий стани природи.

9. Критерій мінімаксного ризику Севіджа

Використаємо вже складену матрицю ризиків

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 6 & 0 & 8 \\ 12 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Із матриці ризиків отримаємо

$$\left. \begin{array}{l} \max_{1 \leq j \leq n} r_{1j} = 16 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{2j} = 8 \\ \max_{1 \leq j \leq n} r_{3j} = 12 \end{array} \right| \Rightarrow S = \min_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} r_{ij} = 8.$$

Отже, відповідно до отриманого значення оптимальною є стратегія A_2 . Тобто якщо обрати дану тактику, то втрати максимальні фірми за різних варіантів умов виявляться мінімальними.

Підсумуємо отримані висновки:

- стратегія A_1 – виготовити 15 коробок продукції – оптимальна 1 раз;
- стратегія A_2 – виготовити 16 коробок продукції – оптимальна 6 раз;
- стратегія A_3 – виготовити 17 коробок продукції – оптимальна 2 рази.

Тому можна зробити висновок про те, що застосування стратегії A_2 найбільш вигідно. Але остаточне рішення залежить від схильності до ризику особи, яка його приймає.

Задача 2.23. Після декількох років експлуатації обладнання може опинитися в одному з трьох станів: потрібно профілактичний ремонт; потрібна заміна окремих деталей і вузлів; потрібен капітальний ремонт.

Залежно від ситуації керівництво підприємства може прийняти такі рішення:

- 1) відремонтувати обладнання своїми силами, що потребують витрат 5, 7, 10;

2) викликати спеціальну бригаду ремонтників, витрати в цьому випадку складуть 6, 4, 8;

3) замінити обладнання новим, реалізувавши застаріле за залишковою вартістю. Сукупні витрати на цей захід складуть 21, 16, 7.

Потрібно знайти оптимальне розв'язок даної проблеми з урахуванням наступних припущень:

- на основі узагальнення досвіду експлуатації аналогічного обладнання визначені ймовірності настання відповідних станів – 0,4; 0,45; 0,15;
- наявний досвід свідчить про рівну ймовірності настання відповідних станів;
- показник ступеня довіри $h = 0,6$;
- про можливість настання відповідних станів нічого певного сказати не можна;
- критерій песимізму $\lambda = 0,8$.

Розв'язання

Гра парна, статистична. У грі беруть участь 2 гравця: керівництво підприємства і «природа».

Під «природою» в даному випадку розуміємо сукупність зовнішніх чинників, які визначають стан обладнання.

Стратегія керівництва:

A_1 – відремонтувати обладнання своїми силами

A_2 – викликати бригаду фахівців

A_3 – замінити обладнання новим

Стратегія природи – 3 можливих стану обладнання.

N_1 – потрібно профілактичний ремонт;

N_2 – слід замінити окремі деталі і вузли;

N_3 – потрібен капітальний ремонт.

Розрахунок платіжної матриці і матриці ризиків

Оскільки елементи матриці - витрати, то будемо вважати їх виграшними

але зі знаком мінус. Тому платіжна матриця буде мати вид:

	N_1	N_2	N_3
A_1	-5	-7	-10
A_2	-6	-4	-8
A_3	-21	-16	-7

Складаємо матрицю ризиків:

	N_1	N_2	N_3	$\max r_{ij}$
A_1	$(-5) - (-5) = 0$	$(-4) - (-7) = 3$	$(-7) - (-10) = 3$	3
A_2	$(-5) - (-6) = 1$	$(-4) - (-4) = 0$	$(-7) - (-8) = 1$	1
A_3	$(-5) - (-21) = 16$	$(-4) - (-16) = 12$	$(-7) - (-7) = 0$	16

Використаємо критерій Байєса:

Визначаємо середні виграші:

$$\bar{a}_1 = -5 \cdot 0,4 - 7 \cdot 0,45 - 10 \cdot 0,15 = -6,65.$$

$$\bar{a}_2 = -6 \cdot 0,4 - 4 \cdot 0,45 - 8 \cdot 0,15 = -5,4.$$

$$\bar{a}_3 = -21 \cdot 0,4 - 16 \cdot 0,45 - 7 \cdot 0,15 = -16,65.$$

Серед отриманих результатів виберемо максимальне: $\bar{a}_2 = -5,4$.

Отже, за критерієм Байєса оптимальною є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Використаємо критерій Лапласа. Прийmemo $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Визначимо показник ефективності для кожної стратегії:

$$\bar{a}_1 = -5 \cdot \frac{1}{3} - 7 \cdot \frac{1}{3} - 10 \cdot \frac{1}{3} = -7,33.$$

$$\bar{a}_2 = -6 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{3} - 8 \cdot \frac{1}{3} = -6.$$

$$\bar{a}_3 = -21 \cdot \frac{1}{3} - 16 \cdot \frac{1}{3} - 7 \cdot \frac{1}{3} = -14,66.$$

Серед отриманих значень виберемо максимальне: $\bar{a}_2 = -6$.

Отже, критерієм Лапласа оптимальною є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Використаємо критерій Ходжа-Лемана. Знайдемо показники

ефективності для кожної стратегії:

$$HL_1 = (1 - 0,6) \cdot (-9) + 0,6 \cdot (-4 \cdot 0,4 - 6 \cdot 0,45 - 9 \cdot 0,15) = \\ = 0,4 \cdot (-9) + 0,6 \cdot (-1,6 - 2,7 - 1,35) = -3,6 + 0,6 \cdot (-5,65) = -3,6 - 3,39 = -6,99.$$

$$HL_2 = (1 - 0,6) \cdot (-8) + 0,6 \cdot (-6 \cdot 0,4 - 4 \cdot 0,45 - 8 \cdot 0,15) = \\ = 0,4 \cdot (-8) + 0,6 \cdot (-2,4 - 1,8 - 1,2) = -3,2 + 0,6 \cdot (-5,4) = -3,2 - 3,24 = -6,44.$$

$$HL_3 = (1 - 0,6) \cdot (-21) + 0,6 \cdot (-21 \cdot 0,4 - 16 \cdot 0,45 - 7 \cdot 0,15) = \\ = 0,4 \cdot (-21) + 0,6 \cdot (-8,4 - 7,2 - 1,05) = -20,6 + 0,6 \cdot (-16,65) = -20,6 - 9,99 = -30,59.$$

Знайдемо оптимальну стратегію, за критерієм Ходжа-Лемана:

$$HL = \max HL_i = -6,44 = HL_2.$$

Отже, критерієм Ходжа-Лемана оптимальною є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Для застосування критеріїв Геймеєра складемо матрицю Геймеєра:

$$G = \begin{pmatrix} -5 \cdot 0,4 & -7 \cdot 0,45 & -10 \cdot 0,15 \\ -6 \cdot 0,4 & -4 \cdot 0,45 & -8 \cdot 0,15 \\ -21 \cdot 0,4 & -16 \cdot 0,45 & -7 \cdot 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3,15 & -1,5 \\ -2,4 & -1,8 & -1,2 \\ -8,4 & -7,2 & -1,05 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо показники ефективності кожної стратегії:

$$GW_1 = \min_{1 \leq j \leq n} a_{1j} = -3,15.$$

$$GW_2 = \min_{1 \leq j \leq n} a_{2j} = -2,4.$$

$$GW_3 = \min_{1 \leq j \leq n} a_{3j} = -8,4.$$

Оптимальну стратегію відповідає показник ефективності $GW = \max GW_i = GW_2 = -2,4$. Отже, за критерієм Геймеєра оптимальною є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Для застосування критерій Вальда обчислимо $W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(-10, -8, -21) = -8$.

І за критерієм Вальда оптимальною є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Для застосування критерій максимакса обчислимо $\max_i \max_j a_{ij} = \max(-5, -4, -7) = -4$. За критерієм максимакса оптимальною є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Критерій добутків в умовах повної невизначеності.

Для застосування даного критерію слід перетворити матрицю так, щоб $a_{ij} > 0$, для цього потрібно виконати зсув на $b = |\min a_{ij}| + 1 = 22$.

Патіжна матриця матиме вигляд $A' = \begin{pmatrix} 17 & 15 & 12 \\ 16 & 18 & 14 \\ 1 & 6 & 15 \end{pmatrix}$.

Знайдемо добутки по рядочках:

$$P_1 = 17 \cdot 15 \cdot 12 = 3060.$$

$$P_2 = 16 \cdot 18 \cdot 14 = 3456.$$

$$P_3 = 1 \cdot 6 \cdot 15 = 90.$$

Знайдемо оптимальну стратегію за критерієм добутків, $P = \max P_i = P_2 = 3456$. Отже, за критерієм добутків оптимальною є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Для застосування критерію Гурвіца обчислимо показники

$$H_1 = -10 \cdot 0,8 - 5 \cdot (1 - 0,8) = -9.$$

$$H_2 = -8 \cdot 0,8 - 4 \cdot (1 - 0,8) = -7,2.$$

$$H_3 = -21 \cdot 0,8 - 7 \cdot (1 - 0,8) = -18,2.$$

За критерієм Гурвіца оптимальною є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Критерій Севіджа: з матриці ризиків знаходимо $S = \min_j \max_i r_{ij} = \min(3, 1, 6) = 1$. За критерієм Севіджа оптимальною є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Отже, оптимальною стратегією за різними критеріями для даної гри є стратегія A_2 – викликати бригаду фахівців.

Задача 2.24. Необхідно закупити вугілля для обігріву будинку. Кількість вугілля обмежена і протягом холодного періоду має бути повністю витрачено. Купувати вугілля можна в будь-який час, проте влітку воно дешевше, ніж узимку. Невизначеність полягає в тому, що невідомо, якою буде зима: суворою, тоді доведеться докуповувати вугілля або м'якою, тоді частина вугілля може залишитися невикористаною.

Є такі дані про кількості та ціни вугілля, необхідного взимку для опалення:

Зима	Кількість вугілля, т	Середня ціна
М'яка	6	8
Середня	7	9
Холодна	8	9,5

Ці ціни відносяться до закупівлі вугілля взимку. Влітку ціна вугілля – 8 за 1 т. та є місце для зберігання запасу вугілля до 8 т., заготованого влітку. Якщо потрібно взимку докупити вугілля, якого бракує, докупка буде за зимовими цінами. Передбачається, що все вугілля, яке збережеться до кінця зими, влітку стає неякісним.

Потрібно описати ігрову схему, за допомогою критеріїв визначити скільки вугілля влітку потрібно закупити на зиму з урахуванням наступних припущень:

- відомі ймовірності настання кожної зими: для м'якої зими – 0,3; для середньої зими – 0,55; холодної – 0,2;
- наявний досвід свідчить про рівну ймовірності настання відповідних станів;
- показник ступеня довіри $h = 0,3$;
- про можливості настання відповідних станів нічого певного сказати не можна;
- критерій песимізму $\lambda = 0,7$.

Розв'язання:

Гра парна матрична з природою. Перший гравець – людина, яка зауповує вугілля. Її можливі стратегії:

A_1 – купити 6 т вугілля;

A_2 – купити 7 т вугілля;

A_3 – купити 8 т вугілля.

Другий гравець – природа. Можливі стани природи такі:

N_1 – зима буде м'якою;

N_2 – зима буде середньою;

N_3 – зима буде холодною.

Складемо платіжну матрицю. Оскільки елементами матриці є витрати свідомого гравця, то будемо вважати їх вигашними але зі знаком мінус. Тому платіжна матриця буде мати вид:

	N_1	N_2	N_3
A_1	$-6 \cdot 8 = -48$	$-(6 \cdot 8 + 1 \cdot 9) = -57$	$-(6 \cdot 8 + 2 \cdot 9,5) = -67$
A_2	$-7 \cdot 8 = -56$	$-7 \cdot 8 = -56$	$-(7 \cdot 8 + 1 \cdot 9,5) = -65,5$
A_3	$-8 \cdot 8 = -64$	$-8 \cdot 8 = -64$	$-8 \cdot 8 = -64$

Отже, платіжна матриця має наступний вид:

$$A = \begin{pmatrix} -48 & -57 & -67 \\ -56 & -56 & -65,5 \\ -64 & -64 & -64 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю ризиків:

$$R = \begin{pmatrix} -48+48 & -56+57 & -64+67 \\ -48+56 & -56+56 & -64+65,5 \\ -48+64 & -56+64 & -64+64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 1,5 \\ 16 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Застосування критерія Байєса, використовуємо платіжну матрицю. Визначаємо середні вигоди:

$$\bar{a}_1 = -48 \cdot 0,3 - 57 \cdot 0,55 - 67 \cdot 0,2 = -59,15.$$

$$\bar{a}_2 = -56 \cdot 0,3 - 56 \cdot 0,55 - 65,5 \cdot 0,2 = -60,7.$$

$$\bar{a}_3 = -64 \cdot 0,3 - 64 \cdot 0,55 - 64 \cdot 0,2 = -64.$$

Серед отриманих результатів виберемо максимальне: $\bar{a}_1 = -59,15$. Отже, за критерієм Байєса оптимальною є стратегія A_1 – купити 6 т вугілля.

Застосування критерію Ходжа-Лемана. Знайдемо показники ефективності:

$$HL_1 = (1 - 0,3) \cdot (-67) + 0,3 \cdot (-59,15) = -64,645.$$

$$HL_2 = (1 - 0,3) \cdot (-65,5) + 0,3 \cdot (-60,7) = -62,66.$$

$$HL_3 = (1 - 0,3) \cdot (-64) + 0,3 \cdot (-64) = -64.$$

Знайдемо оптимальну стратегію, за критерієм Ходжа-Лемана:

$$HL = \max HL_i = -62,66.$$

Отже, за критерієм Ходжа-Лемана оптимальною є стратегія A_2 – купити

7 т вугілля.

Застосування критерію Лапласа. Прийmemo $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$. Визначимо показник ефективності для кожної стратегії:

$$\bar{a}_1 = -48 \cdot \frac{1}{3} - 57 \cdot \frac{1}{3} - 67 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{172}{3}.$$

$$\bar{a}_2 = -56 \cdot \frac{1}{3} - 56 \cdot \frac{1}{3} - 65,5 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{177,5}{3}.$$

$$\bar{a}_3 = -64 \cdot \frac{1}{3} - 64 \cdot \frac{1}{3} - 64 \cdot \frac{1}{3} = -64.$$

Серед отриманих значень виберемо максимальне: $\bar{a}_1 = -\frac{172}{3}$.

Отже, за критерієм Лапласа оптимальною є стратегія A_1 – купити 6 т вугілля.

Критерій Геймеєра: Складемо матрицю Геймеєра

$$G = \begin{pmatrix} -14,4 & -31,35 & -13,4 \\ -16,8 & -30,8 & -13,1 \\ -19,2 & -35,2 & -12,8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо показники ефективності кожної стратегії:

$$GW_1 = -31,35;$$

$$GW_2 = -30,8;$$

$$GW_3 = -35,2.$$

Знайдемо оптимальну стратегію $GW = \max GW_i = GW_2 = -30,8$. Отже, за критерієм Геймеєра оптимальною є стратегія A_2 – купити 7 т вугілля.

Застосування критерію Вальда:

$$W = \max_i \min_j a_{ij} = \max(-67; -65,5; -64) = -64.$$

За критерієм Вальда оптимальною є стратегія купити A_3 – 8 т вугілля.

Застосування критерію максимакса: $\max_i \max_j a_{ij} = \max(-48, -56, -64) = -48$. За критерієм максимакса оптимальною є стратегія A_1 – купити 6 т вугілля.

Застосування критерію добутоків в умовах повної невизначеності. Для застосування даного критерію слід перетворити матрицю так, щоб $a_{ij} > 0$, для

цього потрібно виконати зсув на $b = |\min a_{ij}| + 1 = 68$.

Патіжна матриця матиме вигляд $A' = \begin{pmatrix} 20 & 11 & 1 \\ 12 & 12 & 2,5 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Знайдемо добутки по рядочках:

$$P_1 = 20 \cdot 11 \cdot 1 = 220.$$

$$P_2 = 12 \cdot 12 \cdot 2,5 = 360.$$

$$P_3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

Знайдемо оптимальну стратегію за критерієм добутків.

$$P = \max P_i = P_2 = 360.$$

Отже, за критерієм добутків оптимальною є стратегія A_2 – купити 7 т вугілля.

Критерій Гурвіца.

$$H_1 = 0,7 \cdot (-48) - 67 \cdot (1 - 0,7) = -53,7.$$

$$H_2 = 0,7 \cdot (-56) - 65,5 \cdot (1 - 0,7) = -58,85.$$

$$H_3 = 0,7 \cdot (-64) - 64 \cdot (1 - 0,7) = -64.$$

За критерієм Гурвіца оптимальною є стратегія купити A_1 – купити 6 т вугілля.

Застосування критерію Севіджа: $S = \min_i \max_j r_{ij} = \min(3, 8, 16) = 3$.

За критерієм Севіджа оптимальною є стратегія A_1 – купити 6 т вугілля.

Отже, за після розв'язування задачі за різними критеріями має наступні варіанти відповідей:

- стратегія A_1 – купити 6 т вугілля є оптимальною 5 разів;
- стратегія A_2 – купити 7 т вугілля є оптимальною 3 рази;
- стратегія A_3 – купити 8 т вугілля є оптимальною 1 раз.

Таким чином, розглянута задача демонструє, що оптимальний розв'язок задачі є різним при використанні різних критеріїв, та остаточний вибір залишається за свідомим гравцем та залежить від його прагнень.