

Сумський державний педагогічний університет імені А. С. Макаренка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

**Система підготовки до розв'язування завдань ЗНО з математики
(на прикладі змістової лінії «Рівняння та нерівності»)**

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)

Галузь знань: 01 Освіта/Педагогіка

Кваліфікаційна робота
на здобуття освітнього ступеня магістра

Науковий керівник:

Одінцова Оксана Олександрівна

кандидат фіз.- мат. наук, доцент

«___» _____ 20__ року

Виконавець:

Перепелиця Анастасія Олександрівна

«___» _____ 20__ року

Суми 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ	6
1.1. Нормативно-правове регулювання організації та проведення ЗНО з математики	6
1.2. Система роботи вчителя математики в структурі діяльності ЗЗСО з підготовки учнів до участі у ЗНО з математики	18
1.3. Основні методи та форми підготовки учнів до ЗНО з математики	29
РОЗДІЛ 2	34
МЕТОДИКА РОБОТИ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ З ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ДО ЗНО З МАТЕМАТИКИ (НА ПРИКЛАДІ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ»)	34
2.1. Аналіз навчальної програми та завдань ЗНО з математики за змістовою лінією «Рівняння та нерівності»	34
2.2. Методичні рекомендації для підготовки учнів до виконання завдань ЗНО з математики бланку А	38
2.3. Методичні рекомендації для підготовки учнів до виконання завдань бланку Б	61
ВИСНОВКИ	70
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	71
ДОДАТКИ	78
Додаток А	78
Додаток Б	79
Додаток В	84
Додаток Г	85
Додаток Д	90

ВСТУП

Актуальність теми. Становлення нової системи освіти в Україні супроводжується упровадженням новітніх тенденцій у педагогічній науці та практиці освітнього процесу в ЗЗСО, зокрема і під час навчання математики учнів. Серед таких концептуальних нововведень можемо виокремити зовнішнє незалежне оцінювання (ЗНО), яке, зокрема, з математики є обов'язковим для всіх учнів. Упровадження ЗНО дає можливість об'єктивно оцінити якість загальної підготовки учнів, забезпечити можливість вступу до ЗВО. Перспектива ЗНО створює умови для підвищення мотивації навчання учнів математики.

Відповідно постає проблема розробки методики підготовки учнів до ЗНО з математики. Зокрема постає проблема пошуку і впровадження інноваційних форм, методів і засобів якісної підготовки учнів до ЗНО. У останні роки відбувається активне упровадження дистанційного навчання у ЗЗСО, що обумовлено пандемією вірусу Covid19, а у 2022-2023 навчальному році – російсько-українською війною. Це зумовлює нові вимоги до викладення змісту навчання, до спільної діяльності вчителя та учнів, до результатів навчання. Як показує практика, учні під час підготовки і проходження ЗНО зустрічаються з численними труднощами психологічного, організаційного, дидактичного, методичного характеру. Для їх вирішення потрібна система занять, спрямована на використання новітніх форм та технологій навчання, зміна традиційної подачі шкільного матеріалу з математики, формування вміють учнів виконувати завдання в тестовій формі та інші нововведення.

Система підготовки учнів до ЗНО вимагає від учителів математики інноваційних підходів до підбору системи вправ, передбачає підвищення рівня якості освіти, потребує використання індивідуального та диференційованого підходу в навчанні математики, інтерактивних методик

оцінювання навчальних досягнень учнів з математики з урахуванням загальних критеріїв оцінювання.

Ці міркування і обумовлюють актуальність дослідження системи підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики, зокрема за змістовою лінією «Рівняння та нерівності»

Мета дослідження полягає в дослідженні системи підготовки до розв'язування завдань ЗНО з математики, що стосуються змістової лінії «Рівняння та нерівності».

Мета дослідження реалізується виконанням таких **завдань**:

- 1) опрацювати наукову літературу за темою дослідження;
- 2) опрацювати нормативно-правову базу організації та проведення ЗНО з математики;
- 3) розглянути методичні особливості підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики;
- 4) підготувати розробки елементів системи підготовки до розв'язування завдань ЗНО з математики, зокрема уроків узагальнення та систематизації знань учнів з теми «Рівняння та нерівності».

Об'єкт дослідження – процес навчання математики учнів старшої школи.

Предмет дослідження – система підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики, що стосуються змістової лінії «Рівняння та нерівності».

Методи дослідження. Для виконання поставлених завдань використано наступні методи:

– теоретичні – аналіз, систематизація, узагальнення, які дозволяють опрацювати нормативні, наукові і навчально-методичні джерела, проаналізувати методику і практику підготовки учнів старшої школи до ЗНО з математики;

– емпіричні – вивчення матеріалів навчальної та педагогічної діяльності, які забезпечують дослідження стану і визначення перспективних

напрямків використання різних шляхів підготовки учнів старшої школи до ЗНО з математики.

Робота складається зі вступу, двох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел (64 позицій), додатків.

У першому розділі роботи охарактеризовано нормативно-правове регулювання освітнього процесу під час організації та проведення ЗНО з математики; проаналізовано основні форми організації діяльності ЗЗСО з підготовки учнів до складання ЗНО та діяльність вчителя математики в системі роботи ЗЗСО; розкрито психолого-педагогічні особливості сучасних учнів старшої школи, що проявляються під час підготовки до ЗНО з математики.

У другому розділі роботи розглянуто методичні особливості підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики, що стосуються змістової лінії «Рівняння та нерівності», зокрема навчальні програми та підручники з теми та основний зміст навчального матеріалу з теми; специфіку підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики окремо бланків А та Б; представлено розробки уроків узагальнення та систематизації знань учнів з теми «Рівняння та нерівності» у системі підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики.

У висновках узагальнено й систематизовано результати вивчення і визначено перспективи подальших досліджень.

Основний обсяг роботи – 77 сторінок.

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Нормативно-правове регулювання організації та проведення ЗНО з математики

Математика в системі шкільної освіти відіграє провідну роль в інтелектуальному, моральному й соціальному формуванні особистості. Математика сприяє формуванню сучасного світогляду випускників школи, забезпечує сприймання учнями провідних наукових і технічних ідей, розуміння учнями головних принципів використання сучасних цифрових технологій, загалом відіграє провідну роль у формуванні наукової картини світу [32].

Математична освіта є провідним фактором у розвитку особистості. Зміст навчання математики у ЗЗСО побудовано з урахуванням запитів суспільства, потреб ефективного розвитку науки, функціонування виробництва. Завданням математичної освіти є, по перше, формування в учнів міцної системи теоретичних математичних знань з урахуванням їх індивідуальних розумових здібностей, соціальних прагнень та особистісних можливостей, а, по друге, формування практичної спроможності й готовності учнів до застосування знань у повсякденному житті або у професійній сфері. У сучасних умовах розвитку світового співтовариства, та нашої держави зокрема, підвищення якості математичної освіти є важливою умовою функціонування постіндустріального інформатичного суспільства, формування конкурентоспроможної економіки країни. Таким чином, упровадження ЗНО дає можливість об'єктивно оцінити якість як теоретичних математичних знань учнів, так і рівень сформованості їх практичних навичок та вмінь. ЗНО з математики проводиться з метою забезпечення рівного доступу до навчання у ЗВО, об'єктивного оцінювання результатів навчання учнів у ЗЗСО, визначення їх відповідності державним вимогам [36].

З уведенням зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) випускників загальноосвітніх навчальних закладів українська освіта потребує переосмислення підходів до навчально-виховного процесу, оскільки сучасний випускник повинен бути конкурентоспроможним, здатним застосовувати набуті знання й навички в реальному житті. ЗНО демонструє сильні й слабкі сторони нашої освітньої системи й дозволяє оперативно реагувати: вирішувати актуальні педагогічні проблеми.

Математика має вчити учнів вмінню доводити і міркувати, ілюструвати теорію прикладами та наводити контрприклад, упроваджувати методи дедукції, індукції, конкретизації, узагальнення тощо. Без формування таких компетентностей учнів неможливе продовження їх освіти, неможливе отримання сучасних професій, а відповідно і неможливий науковий та технічний прогрес. Вирішення цих дидактичних проблем відбувається у процесі здійснення підготовки учнів до складання ЗНО. Таким чином, підготовка учнів до ЗНО є одним із засобів забезпечення конкурентоспроможності учня [62].

Участь у ЗНО може взяти кожен, хто здобув повну загальну середню освіту в поточному чи попередніх навчальних роках.

Нормативно-правову базу організації та проведення ЗНО, у тому числі з математики, складають такі документи (рис. 1.1.) [82].

ЗАКОН УКРАЇНИ

- від 24.03.2022 №2157-IX «Про внесення змін до деяких законів України у сфері освіти»

ПОСТАНОВИ КАБІНЕТУ МІНІСТРІВ УКРАЇНИ

- від 14.11.2018 №952 «Про деякі категорії осіб з особливими освітніми потребами»
- Рішення Комітету Верховної Ради України з питань освіти, науки та інновацій «Про затвердження кандидатур на здобуття щорічної Премії Верховної Ради України найкращим учасникам зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання здобутих на основі повної загальної середньої освіти»

ПОСТАНОВИ ТА РОЗПОРЯДЖЕННЯ ГОЛОВНОГО САНІТАРНОГО ЛІКАРЯ УКРАЇНИ

- від 21.05.2020 №24 «Про затвердження тимчасових рекомендацій щодо організації протиепідемічних заходів при проведенні зовнішнього незалежного оцінювання, єдиного вступного іспиту та єдиного фахового вступного випробування в період карантину в зв'язку з поширенням коронавірусної хвороби (COVID-19)»
- лист Міністерства оборони України від 12.06.2020 №220/3382

НАКАЗИ МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

- від 08.08.2022 №715 «Деякі питання проведення у 2023 році зовнішнього незалежного оцінювання результатів навчання, здобутих на основі повної загальної середньої освіти»

Рис. 1.1. Нормативно-правова база організації та проведення ЗНО

Проблема підготовки учнів до ЗНО та ДПА з математики активно досліджувалася такими науковцями, як В. Бевз, М. Бурда, Г. Білянін, О. Білянїна, О. Вашуленко, О. Глобін, Л. Дворецька, О. Єргіна, О. Істер, А. Мерзляк, Є. Нелін, В. Полонський, В. Репета, О. Роганін, О. Томащук, О. Школьний, М. Якір та інші.

ЗНО з математики проводиться кожного року на основі технологій тестування. При цьому завдання для тесту визначаються Українським центром оцінювання якості освіти (УЦОЯО) і відповідають програмі ЗНО. Учасникам ЗНО надаються рівні можливості, оскільки процедура його проведення є стандартизованою [82].

У результаті складання ЗНО кожен учасник отримує кількісну оцінку рівня власних навчальних досягнень, яка використовується:

- для визначення конкурсного балу під час відбору осіб, які вступають на навчання до закладів вищої освіти для отримання ступеня молодшого бакалавра, бакалавра (магістра і спеціаліста медичного, фармацевтичного або ветеринарного спрямувань) на основі повної загальної освіти;
- як оцінки за державну підсумкову атестацію за освітній рівень повної загальної середньої освіти;
- для визначення стану функціонування системи загальної середньої освіти та прогнозування її подальшого розвитку.

Результати ЗНО з математики визначаються за:

- рейтинговою шкалою 100-200 балів – для усіх учасників, які подолали поріг «склав / не склав»
- критеріальною шкалою 1-12 балів – для учасників з числа випускників системи середньої освіти поточного навчального року, які обрали цей навчальний предмет для проходження державної підсумкової атестації у формі зовнішнього оцінювання [82].

Розрахунок тестового бала відбувається на основі критеріїв нарахування балів за виконання різних завдань сертифікаційної роботи ЗНО, розроблених УЦОЯО з математики, а також на основі схеми оцінювання завдань з відкритою та з розгорнутою відповіддю. Відомості щодо порогу «склав / не склав», визначення рейтингової оцінки здійснює експертна комісія. Після цього відбувається створення таблиці оцінювання за шкалою 100-200 балів. Таблиця оцінювання результатів ЗНО з математики за шкалою 1-12 балів теж створюється експертною комісією. Офіційні результати ЗНО з математики

кожен учасник отримує на власній інформаційній сторінці орієнтовно через 25 днів після проведення ЗНО з математики. [82].

Права й обов'язки учасників ЗНО з математики упорядковано у Положенні про порядок проведення ЗНО результатів навчання [82]. Зокрема, учасник ЗНО з математики має право на:

1) доступ до інформації про:

- програми зовнішнього оцінювання;
- форми завдань сертифікаційних робіт;
- строки та порядок проведення зовнішнього оцінювання;
- час і місце проведення зовнішнього оцінювання;
- використання в пунктах зовнішнього оцінювання технічних пристроїв, необхідних для здійснення контролю за проведенням зовнішнього оцінювання;
- порядок визначення, спосіб та час офіційного оголошення результатів зовнішнього оцінювання;

2) виконання сертифікаційних робіт, розроблених згідно з програмами зовнішнього оцінювання з математики;

3) ввічливе та неупереджене ставлення до себе з боку осіб, відповідальних за організацію та проведення зовнішнього оцінювання;

4) безпечні умови під час проходження зовнішнього оцінювання;

5) отримання безкоштовної медичної допомоги в пункті зовнішнього оцінювання (у разі потреби);

6) оскарження процедури проведення та результатів зовнішнього оцінювання (апеляцію);

7) ознайомлення зі своєю сертифікаційною роботою після оголошення результатів зовнішнього оцінювання з математики, отримання засвідченої копії такої роботи.

Учасник зовнішнього оцінювання зобов'язаний [82]:

1) ознайомитися з Порядком, дотримуватися його вимог;

2) своєчасно прибути до пункту зовнішнього оцінювання із сертифікатом зовнішнього незалежного оцінювання і документом, на підставі якого особу зареєстровано для участі в зовнішньому оцінюванні (серія (за наявності) та номер якого вказані в Сертифікаті), а у разі, якщо такий документ було визнано недійсним (у тому числі у зв'язку із втратою, обміном, скасуванням, закінченням терміну дії), – іншим документом, що посвідчує особу;

3) ввічливо ставитися до учасників зовнішнього оцінювання і працівників пункту зовнішнього оцінювання;

4) виконувати вказівки та вимоги працівників пункту зовнішнього оцінювання щодо процедури проходження зовнішнього оцінювання;

5) після завершення часу, відведеного для виконання сертифікаційної роботи, повернути матеріали зовнішнього оцінювання (крім зошита із завданнями сертифікаційної роботи) працівникам пункту зовнішнього оцінювання;

6) виконувати сертифікаційну роботу на робочому місці, визначеному Українським центром;

7) виконувати та оформляти сертифікаційну роботу згідно з правилами, зазначеними в зошиті із завданнями.

Учаснику ЗНО заборонено [82]:

- 1) використовувати в пункті зовнішнього оцінювання засоби зв'язку, пристрої зчитування, обробки, збереження та відтворення інформації;
- 2) протягом часу, відведеного для виконання сертифікаційної роботи:
 - спілкуватися в будь-якій формі з іншим учасником зовнішнього оцінювання під час виконання сертифікаційної роботи;
 - виносити за межі аудиторії зошити із завданнями сертифікаційної роботи, їх окремі аркуші, бланки відповідей;

– мати при собі або на своєму робочому місці засоби зв'язку, пристрої зчитування, обробки, збереження та відтворення інформації, а також окремі елементи, які можуть бути складовими частинами відповідних технічних засобів чи пристроїв, друковані або рукописні матеріали, інші засоби, предмети, прилади, що не передбачені процедурою зовнішнього оцінювання (крім дозволених виробів медичного призначення, про наявність яких учасник зовнішнього оцінювання повинен повідомити працівникам пункту зовнішнього оцінювання до початку виконання роботи);

3) персоналізувати сертифікаційну роботу.

Якщо учасник ЗНО порушив вказані вимоги, то за вимогою осіб, відповідальних за проведення ЗНО на цьому пункті тестування він повинен здати матеріали ЗНО та залишити пункт ЗНО [82].

Під час підготовки до ЗНО з математики, слід враховувати структуру та зміст тестових завдань. Розглянемо надалі зміст завдань ЗНО з математики. Їх визначено Програмою ЗНО з математики, яку затвердженою МОН України. У свою чергу програму створено на основі діючих навчальних програм з математики для ЗЗСО. Наприклад, тест ЗНО у 2012 р. містив 32 завдання, на виконання яких було відведено 150 хвилин. Завдання були трьох різних форм:

- завдання з вибором однієї правильної відповіді;
- завдання на встановлення відповідності;
- завдання відкритої форми з короткою відповіддю [82].

Натомість тест ЗНО з математики у 2020 році містив 32 завдання (рис. 1.2), тест ЗНО з математики у 2021 році містив 34 завдання, але інших різних форм:

- з вибором однієї правильної відповіді (16 завдань);
- на встановлення відповідності (4 завдання);
- відкритої форми з короткою відповіддю (9 завдань);

- відкритої форми з розгорнутою відповіддю (5 завдань) [82].

У 2022 році ЗНО з математики окремо не проводилося у зв'язку з російсько-українською війною, а тестові завдання з математики були включені в єдиний мультитест з української мови, математики та історії України. Тому більш детально розглянемо завдання тесту ЗНО з математики попередніх років, тобто до 2022 року.

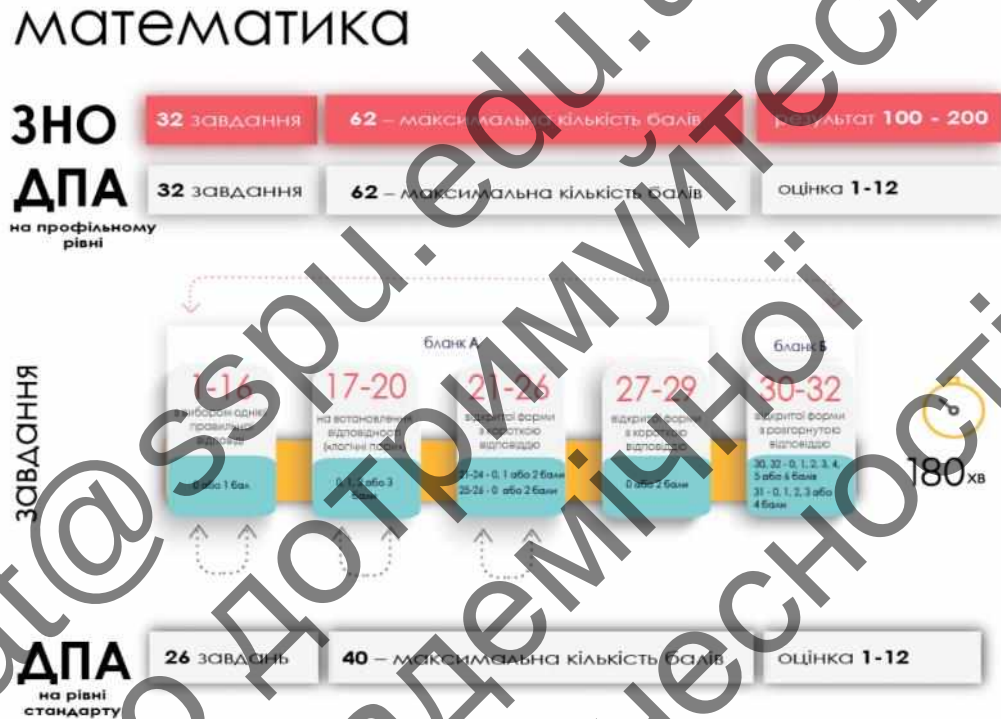


Рис. 1.2. Структура сертифікаційної роботи з математики (2020 р.)

1. Завдання з вибором однієї правильної відповіді [82].

Формулювання таких завдань передбачало 5 варіантів відповідей, при чому серед них є лише одна правильна. Цю відповідь певним чином необхідно позначити у бланку відповідей А.

За виконання кожного із завдань 1–16 учасник тестування може отримати 0 балів або 1 бал. Завдання вважатиметься виконаним правильно й учасник отримує 1 бал, якщо обрано та певним чином позначено у бланку А правильний варіант відповіді. Завдання вважатиметься виконаним неправильно й учасник отримує 0 балів, якщо у бланку А:

- позначено неправильний варіант відповіді;

б) позначено два або більше варіантів відповіді, навіть якщо поміж них є правильний;

в) не позначено жодного варіанта відповіді.

Приклад такого типу завдань із сертифікаційної роботи з математики ЗНО 2021 року з коментарем до його розв'язання наведено на рисунку 1.3 [64].

Приклад 1. Обчисліть: $\sqrt[3]{27 \cdot 0,008}$.

А	Б	В	Г	Д
0,6	0,2	0,006	3	0,06

Розв'язання. Оскільки $27 = 3^3$ і $0,008 = 0,2^3$,
то $\sqrt[3]{27 \cdot 0,008} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{0,008} = 3 \cdot 0,2 = 0,6$.
Отже, правильна відповідь А.
Зразок позначення відповіді в бланку А:

	А	Б	В	Г	Д
1	☒	☐	☐	☐	☐

Рис. 1.3. Приклад завдань з вибором однієї правильної відповіді

2. Завдання на встановлення відповідності (логічні пари) [82].

До кожного завдання у двох колонках подано інформацію, яку позначено цифрами і буквами. Виконуючи завдання, необхідно встановити відповідність і утворити логічні пари. За кожну правильно позначену логічну пару учасник отримує 1 бал. Отже, максимальна кількість балів за повністю правильно виконане завдання становить 3 бали. Відповідність вважатиметься встановленою правильно й учасник отримує 1 бал, якщо для обраної інформації, позначеної цифрою, правильно визначено відповідну інформацію, позначену буквою, і результат певним чином позначено у бланку відповідей А. Відповідність вважатиметься встановленою неправильно й учасник отримує 0 балів, якщо у бланку А:

- а) для розглядуваної цифри позначено неправильний варіант відповіді;
- б) для розглядуваної цифри позначено два або більше варіантів відповіді, навіть якщо поміж них є правильний;
- в) для розглядуваної цифри не позначено жодного варіанта відповіді.

У таких завданнях на встановлення відповідей слід починати розв'язання з підзавдань, які є більш простими. Тоді під час розв'язування більш складних підзавдань скорочується кількість можливих альтернативних варіантів, і учень може зробити меншу кількість помилок. Слід також враховувати, що букв більше, ніж цифр, тому в усіх таких завданнях кілька варіантів залишаються не визначеними.

Приклад такого типу завдань із сертифікаційної роботи з математики ЗНО 2021 року наведено на рисунку 1.4 [64].

18. Установіть відповідність між виразом (1–3) і твердженням про його значення (А–Д), яке є правильним, якщо $a = -2\frac{1}{3}$.

Вираз	Твердження про значення виразу
1 a^2	А більше від 5
2 $a + a $	Б належить проміжку (0; 1)
3 $\log_5 5^a$	В є від'ємним числом
	Г належить проміжку [1; 5)
	Д дорівнює 0

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Рис. 1.4. Приклад завдань на встановлення відповідності

Під час розв'язування даного завдання доцільно розпочати з підзавдання нижчого рівня складності і обчислити значення першого виразу a^2 при заданому значенні змінної. Отримаємо значення $\frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}$, яке відповідає варіанту А «більше від 5». Оскільки за умовою значення a є від'ємним, то у другому виразі будемо мати суму протилежних чисел, яка дорівнює 0, і правильна пара 2–Д. Під час розгляду третього виразу слід

звернутися до теми «Логарифмічні вирази» і пригадати основну логарифмічну тотожність:

$$\log_5 5^a = a \cdot \log_5 5 = a \cdot 1 = a.$$

Тоді якщо $a = -2\frac{1}{3}$, то правильна відповідь 3–В.

3. Завдання відкритої форми з короткою відповіддю [82].

Під час розв'язування таких завдань отриману відповідь слід вписати у вигляді десяткового дробу або цілого числа в бланк відповідей А у відповідне місце для заповнення. При цьому розв'язання завдань у чернетці до уваги не беруться. Учасник тестування за виконання такого завдання отримує 0 балів або 2 бали. Завдання є виконаним правильно, якщо у бланку А вказано правильну відповідь, тоді учасник отримує 2 бали. Учасник отримує 0 балів, якщо у бланку А:

- а) записано неправильну відповідь;
- б) неправильно розміщено правильну відповідь;
- в) не записано відповідь.

Приклад такого типу завдань із сертифікаційної роботи ЗНО з математики наведено на рисунку 1.5 [64].

школи. Наголошуємо, що особливої уваги потребує методика підготовки учнів до розв'язування завдань різних типів.

1.2. Система роботи вчителя математики в структурі діяльності ЗЗСО з підготовки учнів до участі у ЗНО з математики

Нині в Україні здійснюються активні перетворення в системі освіти, створюються нові педагогічні концепції, упроваджуються нові стандарти навчання. При цьому відбувається оновлення змісту навчання та вимог до результатів навчання учнів ЗЗСО. Становлення та реформування системи освіти відбувається з метою входження у світовий освітній простір.

Цей процес потребує істотних змін у педагогічній теорії, нововведень у практиці освітнього процесу в ЗЗСО. Така освітня інновація має визначати стратегію педагогічної діяльності учителя математики в старших класах: спрямувати освітній процес на формування особистості, на розкриття здібностей та потенційних можливостей учнів [36].

Діяльність ЗЗСО цілком передбачає, що випускник школи повинен бути готовим [48]:

Вивчати:

- власний і чужий досвід і отримувати користь з них;
- прийоми навчання, систематизувати і організовувати їх;
- методи постановки і вирішення проблем;
- методи самоорганізації та самоосвіти.

Шукати:

- необхідну інформацію в різних базах даних;
- необхідну інформацію, опитуючи оточуючих (товаришів, вчителів, фахівців);
- відповіді на важкі питання у експертів;
- прийоми і методи класифікації інформації.

Співпрацювати, тобто:

- вміти працювати в групах;
- вміти приймати рішення;
- вміти залагоджувати розбіжності і конфлікти;
- вміти домовлятися;
- вміти розробляти і виконувати договори.

Формування цих інтегральних компетентностей дозволить створити психологічну основу для підготовки учнів до складання ЗНО, у тому числі з математики.

Виділимо також провідні методичні особливості, які слід враховувати вчителю математики, обираючи форми роботи з учнями старшої школи на уроках математики в процесі їх підготовки до складання ЗНО з математики (рис. 1.6) [56].

1. У старшокласників вже є стійкі інтереси до предметів і усвідомлені пріоритети. А значить, вибирати зміст, навіть способи його вивчення, рівень складності завдань необхідно з урахуванням запитів учнів.

2. Підготовка повинна бути більш індивідуальною. У кожному класі стільки особистостей, скільки числиться учнів за списком. І кожна особистість зі своїми запитами і з обраним напрямком подальшої освіти, тому важливо враховувати запити кожного.

Рис. 1.6. Форми роботи з учнями старшої школи на уроках математики в процесі їх підготовки до складання ЗНО

Саме з цієї точки зору важливо виділити проблему підготовки учнів до ЗНО з математики в окрему проблему, оскільки це висуває нові вимоги до спільної діяльності вчителя та учнів на уроках математики в старших класах.

Підготовка учнів до ЗНО має бути органічною частиною діяльності вчителя математики при роботі зі старшокласниками поряд з іншими формами роботи. Учитель математики з метою підготовки до ЗНО має вчити доводити і міркувати, вчити прийомам розумової діяльності, формувати грамотну математичну мову, зацікавлювати фактами з історії математики, використовувати дослідницький підхід, самостійну роботу учнів на уроках математики в старшій школі [23].

Коли учні досягають хороших результатів у вивченні математики, то природним продовженням уроку стає спільне обговорення багатьох завдань, складання нових, а радісною і приємною подією стає не лише позитивна оцінка високого рівня, а сам процес пізнання математики [5].

Процес пізнання і розвитку в школі не може обмежуватися рамками уроків, оскільки сама програма з шкільних предметів – мінімум з усього багатства світової науки і культури. Щоб найбільш ефективно сприяти розвитку здібностей і схильностей, врахувати особливості характеру і темпераменту, допомогти учням зорієнтуватися у виборі професії, розвинути психологічну основу для успішного навчання і продовження освіти, необхідні, по-перше, кваліфікована робота шкільного психолога; по-друге, продумана і налагоджена система позакласної роботи [4].

Зупинимося на описі системи позакласної роботи школи, яка відводить першочергове завдання розвитку наукового світогляду школярів і більш глибокої підготовки учнів до подальшого навчання у ЗВО. Основна форма занять при цьому – предметні гуртки, олімпіади, творчі конкурси, інтелектуальні ігри, літні предметні табори, дистанційне навчання та дослідницька робота школярів [5].

Можна запропонувати наступну систему роботи при підготовці школярів до складання ЗНО з математики. На початку навчального року випускники та їх батьки (обов'язково) знайомляться з планом підготовки до ЗНО та з додатковими матеріалами [80]:

- зі структурою Зовнішнього незалежного оцінювання з математики;
- з переліком ресурсів мережі Інтернет;
- зі списком посібників для підготовки до ЗНО;
- з вимогами до рівня підготовленості учнів;
- з порадами психологів щодо складання ЗНО.

При цьому адміністрація ЗЗСО може провести такі заходи в рамках підготовки старшокласників до ЗНО [46; 85]:

- 1) організувати ознайомлення учителів, учнів та батьків із загальною інформацією щодо зовнішнього незалежного оцінювання учнів, опрацювати існуючу нормативну базу;
- 2) вчителям-предметникам, зокрема математики, класним керівникам здійснювати вивчення профорієнтаційних нахилів учнів з метою оптимального вибору предметів тестування та подальшого самовизначення учнів відповідно до їхніх пізнавальних можливостей, соціальної адаптації та успішної інтеграції в суспільстві, створювати умови для оптимальної реалізації випускниками свого освітнього й особистісного потенціалу;
- 3) організувати надання консультативної допомоги з питань формування психологічної готовності учнів до ЗНО, прагнення здобути належну освіту;
- 4) провести моніторинг якості викладання базових дисциплін, у тому числі математики, у старшій школі;
- 5) провести засідання предметно-методичної комісії на якому обговорити питання про запровадження тестування як інструменту зовнішнього незалежного оцінювання і моніторинг якості освіти у

процесі викладання окремих предметів, у тому числі математики, та проаналізувати результати ЗНО попередніх років;

- 6) провести батьківські збори в 11-му класі на тему підвищення мотивації учнів, батьків та вчителів щодо мети і завдань зовнішнього незалежного оцінювання;
- 7) провести зустріч з працівниками обласного РЦОЯО з метою ознайомлення з умовами проведення ЗНО в поточному навчальному році;
- 8) знайомити учнів та вчителів з офіційними джерелами, де висвітлюється питання ЗНО, сайтами МОН України, УЦОЯО, матеріалами про тест, рекомендованими МОН України та УЦОЯО;
- 9) вчителям-предметникам, зокрема з математики, ознайомити учнів і батьків зі зразками дидактичних матеріалів тестового характеру, роз'яснити ступінь захищеності тестів;
- 10) вчителям-предметникам, зокрема з математики, проводити тренування в умовах, наближених до умов проведення зовнішнього незалежного тестування; за результатами їх виконання здійснювати моніторинг, аналізувати й інтерпретувати отримані умови;
- 11) вчителям-предметникам, зокрема з математики, використовувати тестування як навчальний прийом і як контрольну форму перевірки знань та вмінь учнів;
- 12) створити та поновлювати матеріали на стенді Державної підсумкової атестації – ЗНО тощо.

З метою підготовки до ЗНО з математики існує розгалужена система позакласної роботи: видано значну кількість посібників, розроблено навчальні онлайн-курси, розвинено систему приватних занять з репетиторами. На нашу думку, ці способи підготовки до ЗНО з'явилися через невідповідності тестів ЗНО з математики тим знанням і вмінням, які учні здобувають на уроках математики. Маючи спільну навчальну програму та підручники з математики, кожний учитель має власні пріоритети у

професійній діяльності, свій індивідуальний стиль роботи. У такому разі вчителю математики слід проводити підготовку до ЗНО з математики на основі тестів ЗНО попередніх років, пропонувати учням брати участь у пробних тестуваннях, які проводять ЗВО. Це допоможе учневі та вчителю ознайомитися з вимогами до випускників [64].

Важливою є також система роботи психолога з допомоги учням якісно підготуватись до ЗНО та протистояння психологічним навантаженням під час складання ЗНО: налаштовуватися на успіх, не засмучуватися, скласти план підготовки до занять, під час розв'язування завдання бути зосередженим лише на поточному завданні [79].

Для створення системи психологічної підтримки учнів у процесі підготовки до ЗНО, для якісної побудови методики підготовки до ЗНО з математики слід враховувати психолого-педагогічні особливості сучасних учнів [66].

Сучасні учні є представниками нового цифрового покоління Z, яке швидко опановує комп'ютерні програми, сформувало новий тип мислення – тип *мережевого мислення* (Е. Проніна). Воно не має меж, носить глобальний характер і за логікою корелює з поняттям *мережеве покоління*. На основі аналізу наукової літератури можна виділити *систему ознак мережевого мислення*:

1) система гіперпосилань, де думка може переорієнтуватися або навіть мимоволі змінитися під впливом нових даних, кожне гіперпосилання – це додатковий ступінь свободи осягнення суті повідомлення та інтерпретації даних;

2) превалювання візуального сприйняття, тоді як текст примітивізується до елементарного переліку фактів, думок, цитат і деталей; деякі дослідники вважають, що одна з особливостей мережевого покоління – це швидке читання і миттєве розуміння сенсу [66]. Через такий спосіб роботи з інформацією змінюється і мислення людини, яке перетворюється в систему, організовану тегами і ключовими словами. Якщо ж інформації входить

занадто багато, необхідно вміти отримувати потрібну з пам'яті за асоціаціям – і цифрове покоління вже це робить. Варто мати на увазі, що мислення молодих людей орієнтоване на цілу систему факторів, щоб переробляти інформацію короткими порціями в форматі так званого «кліпового мислення»;

3) специфічний темпо-ритм і лаконізм, а тому тенденція переривати виклад думок, пропускати ті елементи висловлювання, які легко розуміються в даному контексті або ситуації;

4) стилістика інтерактивності і «право на авторитетне втручання в процес обговорення теми» [46], особа мислить, говорить і діє без уваги на регламент, субординацію і пристойності, слідуючи власним інтенціям, розуміючи світ у світлі особистих інтересів і відчуваючи свій прямий вплив на ситуацію. Зазначене обумовлене прагненнями особистості до самовираження і самоствердження за допомогою форумів, чатів, соціальних мереж та інших засобів масової комунікації, де кожен, зайшовши в Інтернет, має можливість відкрито висловити свій суб'єктивний погляд на важливі події, що відбулися в світі – це інший психічний стан, інша усвідомленість, де не останнє місце займає індивідуальна активність. Фахівець не виписує нову інформацію, а оперує нею, самостійно знаходить дані, що цікавлять його, в доступних джерелах, високо оцінює свої можливості, погляди і наполягає на тому, щоб їх сприймали серйозно.

Американський психолог Ш. Постник-Гудвін [82] визначає такі ознаки покоління Z (рис.1.7).



Рис.1.7. Характеристики покоління Z

Вітчизняні педагоги-практики пропонують рекомендації щодо організації навчання дітей покоління Z. Так, С. Попова [82], яка має досвід навчання молоді, найбільш наближеної до покоління Z, пропонує таке.

1. Приділяти більше часу на осмислення матеріалу після уроку:
 - доступ учнів до матеріалів уроку, можливість переглянути матеріал;
 - блоки вправ для розуміння тексту із невеликими тестовими завданнями та творчою роботою, де потрібно висловити власну думку з певного питання;
 - завдання створити схему, яка буде виділяти ключові моменти уроку або встановлювати взаємозв'язок між поняттями теми.
2. Структурувати способи досягнення мети:
 - надати алгоритм кроків;
 - розробити рекомендації щодо оптимізації роботи, уникнення помилок тощо;
 - доповнити теорію практикою.
3. Надати деяку свободу вибору дій:
 - рекомендувати список використаної літератури та додаткових джерел інформації з теми;

- повідомити, на основі яких критеріїв буде відбуватися загальне оцінювання;
 - розробити візуальний лічильник балів.
4. Залучити учнів до довгострокових проєктів.

Бізнес-журналіст О. Штурвало [82], який має досвід роботи з поколінням Z, запропонував принципи (рис. 1.8), що демонструють правильність постановки завдань для працівників, якщо керівники бажають їх швидкого виконання, та адаптував ці принципи до освітнього процесу.

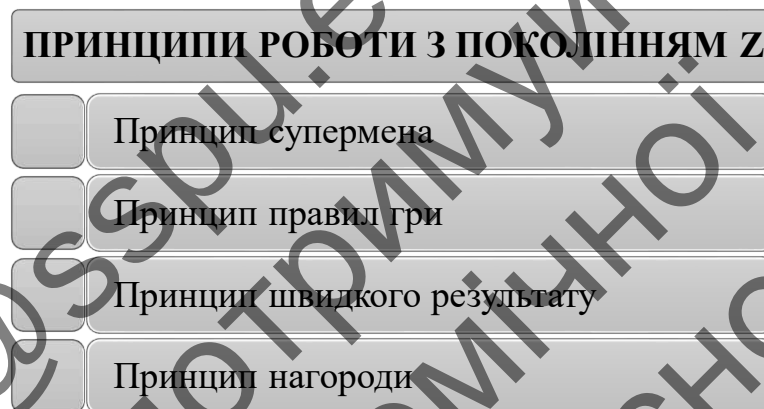


Рис.1.8. Принципи роботи з поколінням Z (за О. Штурвало)

Усвідомлюючи зміни у психіці молодого покоління, яке виростає на повсюдному використанні інформаційних технологій та живе більшою мірою віртуальним світом та його характеристиками, вважаємо необхідним урахувати це у процесі навчання математики загалом та у процесі підготовки до ЗНО з математики зокрема [66].

Можна виділити деякі найбільш значущі психологічні характеристики, які потрібні в процесі складання ЗНО (рис. 1.9).

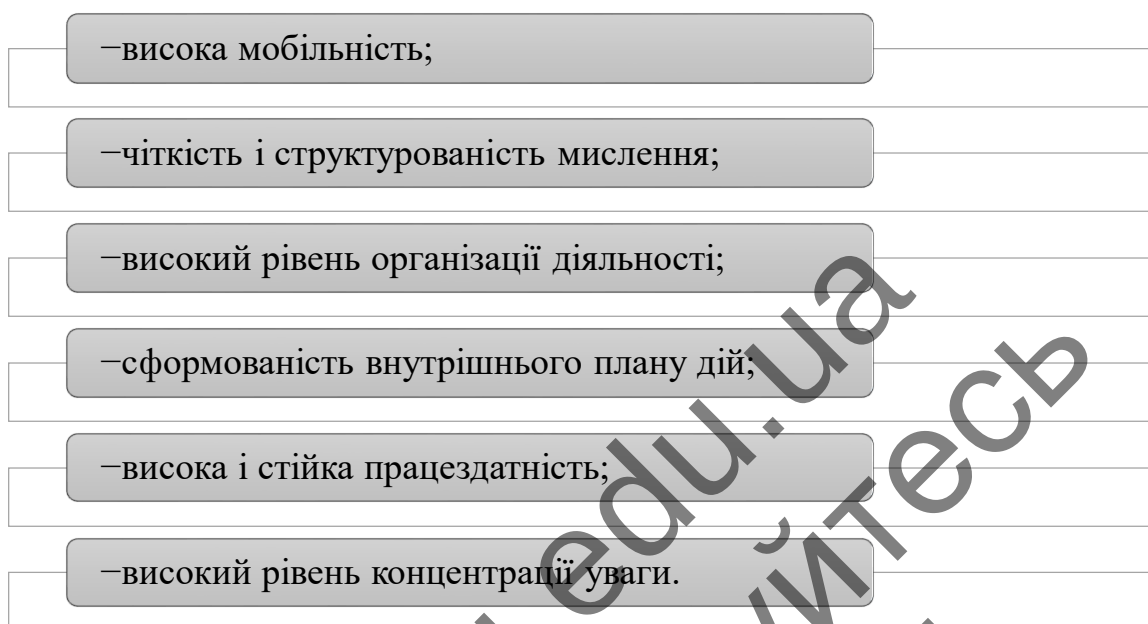


Рис. 1.9. Психологічні характеристики, які потрібні для складання ЗНО

Також для кращого розуміння специфіки ЗНО математики з психологічної точки зору порівняємо його з традиційним іспитом. ЗНО кардинально відрізняється як від усного іспиту, так і від традиційного письмового (додаток А). Таким чином, процедура проходження Зовнішнього незалежного оцінювання відрізняється від звичного досвіду учнів. Охарактеризуємо основні когнітивні та особистісні труднощі, які можуть відчувати випускники під час проходження ЗНО (рис. 1.10, 1.11) [46; 66].

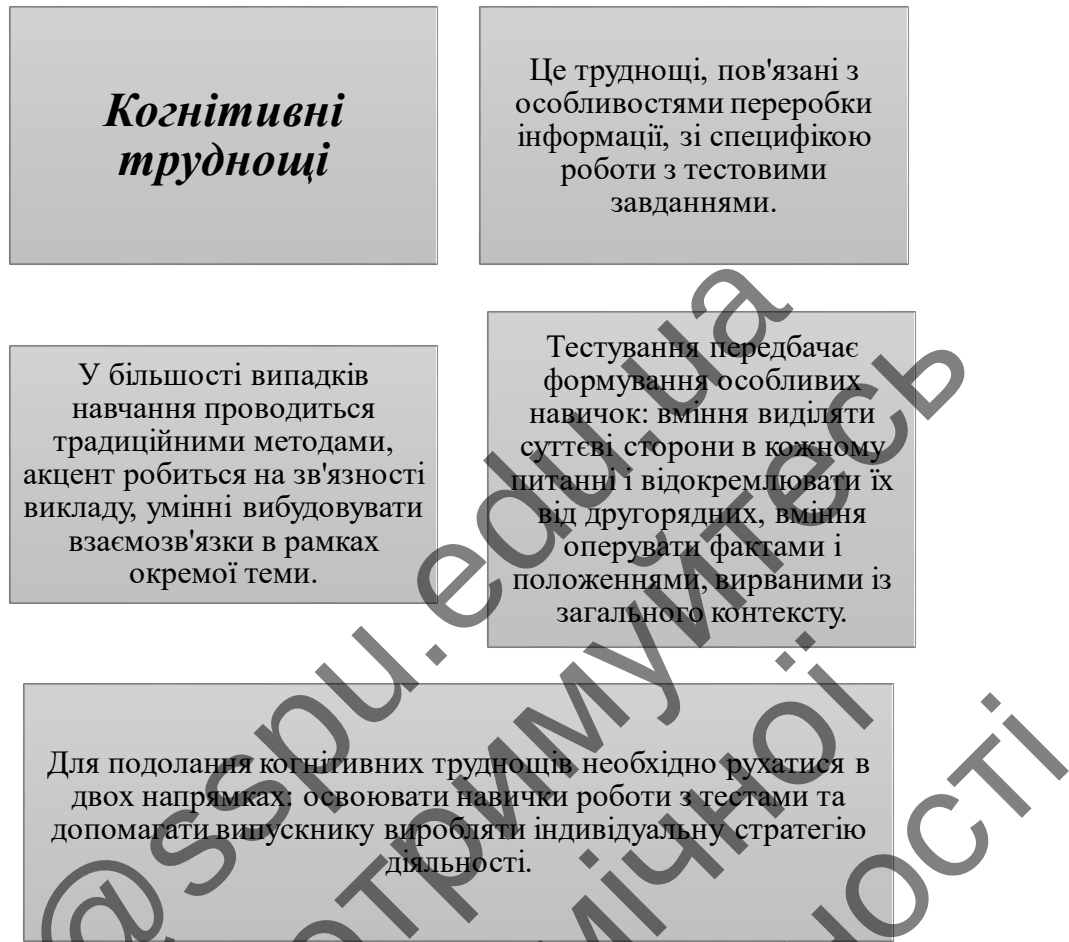
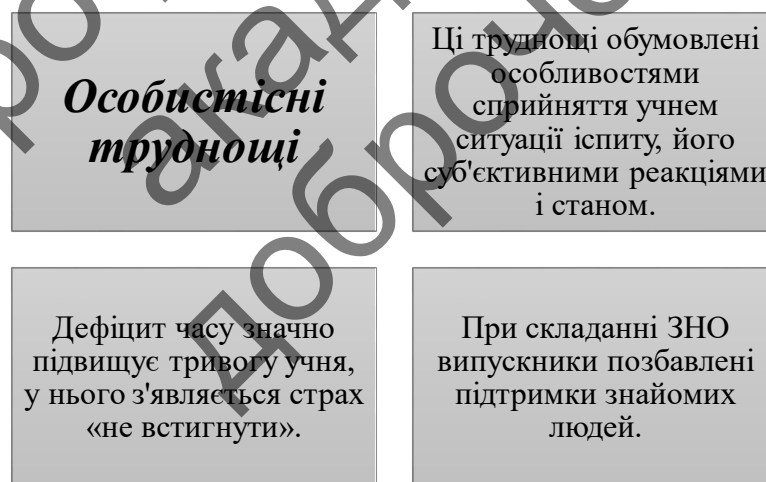


Рис. 1.10. Когнітивні труднощі складання ЗНО



Підводячи підсумки, слід відзначити, що основний наслідок особистісних труднощів – це підвищений рівень тривоги, невпевненості учнів на іспиті, що призводить до дезорганізації їх діяльності, зниження концентрації уваги і працездатності. Тому подолання особистісних труднощів, перш за все, має бути спрямоване на зниження тривоги.

Рис.1.11. Особистісні труднощі складання ЗНО

Отже, для того щоб забезпечити повноцінну підготовку старшокласників до ЗНО, важливо об'єднати зусилля самих випускників, батьків, педагогів, психологів та адміністрації ЗЗСО.

1.3. Основні методи та форми підготовки учнів до ЗНО з математики

Вирішення питання оволодіння вчителями методикою підготовки учнів до ЗНО дає змогу підвищити якість загальної математичної підготовки учнів. Важливим є упровадження у освітній процес ЗЗСО новітніх форм, інноваційних методів і засобів, сучасних технологій якісної підготовки старшокласників до ЗНО.

Основними компонентами підготовки учнів до ЗНО з математики є [64]:

- володіння фактичним матеріалом з основних тем і розділів шкільного курсу математики, сформованість основних знань, умінь, навичок, логічної культури;
- психолого-педагогічний аспект, містить сформованість вольових рис характеру, емоційної зрівноваженості, моральної підготовки [64].

Ці компоненти важливі, оскільки емоційний стан, особливості темпераменту можуть негативно позначитися на результатах тестування. Проте глибокі знання з математики дозволять учням вільно володіти ситуацією складання ЗНО. Тому головну увагу слід приділяти математичній підготовці учнів до ЗНО.

Результати ЗНО виявили ряд невирішених проблем, характерних для підготовки різних категорій випускників. Це дозволяє висловити деякі загальні рекомендації, спрямовані на вдосконалення процесу викладання і підготовки учнів середньої школи [64].

1. Необхідно вдосконалювати методику формування базових умінь, що становлять основу математичної підготовки випускників середньої школи.

2. Аналіз результатів виконання базових завдань з курсу алгебри та початків аналізу показав наявність позитивної динаміки в оволодінні матеріалом розділу «Тригонометрія». В той же ж час викликають тривогу невисокі результати виконання завдань по розв'язуванню ірраціональних рівнянь та логарифмічних нерівностей. Слід звернути більшу увагу для засвоєння учнями стандартних алгоритмів розв'язання завдань такого типу.

3. Необхідно посилити увагу вчителів до викладання курсу геометрії в основній і старшій школі, щоб в процесі навчання учні не тільки опановували теоретичними фактами курсу, а й набували вміння проводити обґрунтовані міркування при розв'язуванні геометричних задач і математично грамотно записувати отриманий розв'язок.

4. Найнижчі результати учні показали при розв'язуванні завдань, які найважче піддаються алгоритмізації: завдання з геометрії, завдання прикладного змісту (де потрібно застосувати вміння читати графіки, розв'язувати сюжетні завдання), а також завдання, для розв'язування яких потрібно застосувати елементарні навички дослідницької роботи.

5. Також слабкою залишається підготовка учнів з питань: виконання спільних дій над звичайними і десятковими дробами; перетворення многочленів; перетворення алгебраїчних дробів; перетворення виразів, що містять степінь з цілим показником; перетворення ірраціональних виразів; розв'язування квадратних, дробово-раціональних рівнянь і нерівностей; визначення властивостей функції за допомогою графіка [64].

6. Починаючи викладати математику з 5 класу, у вчителя з'являється можливість готувати школярів до ЗНО задовго до його початку: посилено працювати над повторенням матеріалу і систематизацією знань, використовувати в процесі навчання різні види діяльності і нові форми

контролю. Усе це готує здобувачів освіти до іспиту як психологічно, так і дозволяє підвищити якість математичної освіти.

Серед різноманітних напрямків нових педагогічних технологій для досягнення поставленої мети вчителів рекомендується використовувати в своїх методиках такі методи та форми роботи:

- навчання у співробітництві;
- метод проєктів;
- індивідуальні консультації;
- робота в малих групах і парах;
- використання ІКТ [23; 64].

Коротко охарактеризуємо кожен форму роботи.

Навчання у співробітництві. Головна ідея цього методу полягає у тому, що клас об'єднується у невеликі групи, в кожній з яких є учень з високим рівнем навчальних можливостей. Кожна команда отримує загальне завдання і працює над ним до тих пір, поки всі члени групи повністю не зрозуміють і не виконають дану роботу.

Метод проєктів. На сучасному етапі розвитку освіти проєктна методика широко поширена. Цей метод можна використовувати для накопичення теоретичних даних і для відпрацювання навичок розв'язування завдань по кожній темі. Тобто учні створюють для себе міні-проєкти у вигляді карток для покрокового розв'язування завдання. Кожним здобувачем освіти створюється індивідуальна папка «Моя підготовка до ЗНО», що містить необхідні теоретичні відомості і набір розв'язаних завдань з кожної теми, ця папка допомагає при самостійній роботі вдома. Захисту проєкту немає, але в міру відпрацювання кожної теми складається залік на знання формул, законів, властивостей і визначень. Роботу над цими міні-проєктами можна проводити і в

Використання ІКТ. Характерною особливістю нашого часу є прагнення багатьох вчителів перебудувати навчальний процес за допомогою цифрових технологій, активізувати учнів, зацікавити їх, привчити до самостійної роботи (комп'ютерне тестування, аналіз розв'язаних завдань, критерії оцінювання тощо). Це дозволяє оптимізувати процес навчання, підвищує мотивацію учнів, сприяє підвищенню якості знань.

Індивідуальні консультації. Консультації за необхідності можна проводити в індивідуальному порядку.

Робота в малих групах і парах. Цей прийом є частиною навчання у співпраці, і так само використовується для формування груп за рівнем знань з метою організації диференціального навчання. Наприклад, клас умовно об'єднується у три групи. Для себе ці групи можна назвати А (учні, які розв'язують стандартні завдання, використовуючи зразки і алгоритми), В (самостійно можуть розв'язувати завдання середнього рівня), С (учні, які цікавляться предметом, розв'язують завдання підвищеного рівня). Завдання для кожної групи різні. При організації тематичної підготовки до іспиту можна використовувати таку форму як довгострокове домашнє завдання. Учням пропонується набір завдань, які вони повинні виконати під час вивчення конкретної теми. Довгострокові домашні завдання виконуються в спеціальних зошитах, які потім здають на перевірку. Після перевірки, рекомендується виконати роботу над помилками. Цю форму роботи рекомендується використовувати, так як для успішної здачі ЗНО недостатньо добре працювати на уроках і регулярно виконувати домашні завдання, необхідно ще додаткова підготовка. Довгостроковими домашніми роботами, вчитель певним чином зобов'язує учнів займатися

Часто вчителі математики намагаються розв'язати якомога більше завдань ЗНО попередніх років. Проте, це недоречно, оскільки [66]:

- завдання не повторюються;
- в учня не утворюється загальний спосіб дії із розв'язування завдання певного виду;
- в учня може бути розгубленість від кількості завдань, запам'ятати розв'язання яких неможливо.

Тому більш ефективним є навчати універсальним підходам та прийомам розв'язування завдань.

Таким чином, підготовка до ЗНО означає вивчення програмного матеріалу з включенням завдань у формах, що використовуються при підсумковій атестації. Для цього на початку підготовки необхідно виявити прогалини в знаннях учнів, на цій основі створити групи учнів і будувати методику підготовки до ЗНО.

Особливу увагу в процесі підготовки учнів до ЗНО займає системний і комплексний моніторинг якості навчання. Це дозволяє контролювати відпрацювання навичок, простежити ступінь підготовки учня з різних тем, давати індивідуальні завдання, використовувати диференційований підхід на уроці математики, виявляти теми, які не засвоєні, контролювати виконання роботи над помилками. Усі демонстраційні тести учням варто включати в окремі папки [43; 66]

Проведення уроків різнорівневого узагальнюючого повторення дозволяє здійснити диференційований підхід і систематизацію матеріалу до найбільш проблемних завдань ЗНО, і при цьому провести своєчасну роботу над помилками та усунення прогалин в знаннях учнів.

Застосування описаних вище способів, прийомів, методів, технологій в роботі з учнями в ході підготовки до ЗНО дозволить забезпечити успішне складання ЗНО з математики.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИКА РОБОТИ ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ З ПІДГОТОВКИ УЧНІВ ДО ЗНО З МАТЕМАТИКИ (НА ПРИКЛАДІ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ»)

2.1. Аналіз навчальної програми та завдань ЗНО з математики за змістовою лінією «Рівняння та нерівності»

На сьогоднішній день у старшій школі математика є предметом, обов'язковим для вивчення у класах усіх профілів.

Закон України «Про освіту», «Про загальну середню освіту» та Державний стандарт базової середньої освіти передбачають існування різних рівнів засвоєння математики.

Нині у процесі навчання математики є два рівні: рівень стандарту та профільний (поглиблений) рівень. Можливим є використання двох програм: для учнів, які вивчають математику на профільному рівні з 10-го класу, і для учнів, які вивчали математику поглиблено з 8-го класу. Навчальну програму представлено у формі таблиці, що містить дві колонки: очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів та зміст навчального матеріалу.

Рівень стандарту. Головним завданням цього курсу є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності [55]. Навчання математики на цьому рівні полягає у забезпеченні загальноосвітньої підготовки з математики, необхідної для успішної самореалізації особистості у динамічному соціальному середовищі, її соціалізації і достатньої для вивчення профільних предметів, для успішної майбутньої професійної діяльності в тих сферах, де математика відіграє роль апарату, специфічного засобу для вивчення й аналізу закономірностей, реальних явищ і процесів.

Мета вивчення математики на рівні стандарту полягає в тому, щоб забезпечити засвоєння учнями системи математичних знань і вмінь, що є складовими загальної культури людини і необхідні для вивчення інших шкільних предметів, сформувати уявлення про ідеї і методи математики, її роль у пізнанні й перетворенні дійсності. Суттєве значення має математика у формуванні наукового світогляду школярів на основі розвитку в них правильних уявлень про природу математики, сутність і походження математичних абстракцій, співвідношення реального й ідеального, характер відображення математичною наукою процесів і явищ реального світу [55]. Згідно навчального плану для загальноосвітніх навчальних закладів учнів 10 – 11 класів на вивчення математики на рівні стандарту відводиться не менше, ніж 210 годин з розрахунку 3 години в тиждень.

Навчання математики у старшій школі спрямоване на засвоєння математичних, предметних компетенцій та формування ключових компетентностей.

Програма профільного рівня [55] розроблена на основі Державного стандарту базової і повної середньої освіти з урахуванням особливостей відповідних профілів навчання. Мета навчання математики на профільному рівні полягає у забезпеченні свідомого і міцного оволодіння системою математичних знань, навичок і умінь, які потрібні у повсякденному житті і майбутній трудовій діяльності, достатні для вивчення інших шкільних дисциплін та продовження навчання у вищих закладах освіти за спеціальностями із значною математичною складовою.

Звернемо увагу на теми, що містять вивчення рівнянь та нерівностей різних видів.

У програмі у темі «Функції, многочлени, рівняння і нерівності» передбачено розв’язання найпростіших рівнянь з параметрами, при цьому у вимогах до результатів навчально-пізнавальної діяльності учнів вказано, що учень має вміти розв’язувати найпростіші рівняння з параметрами, нерівності за допомогою методу інтервалів. У програмі у темі «Степенева функція»

передбачено розв'язання ірраціональних рівнянь, нерівностей з параметрами, у вимогах до результатів навчально-пізнавальної діяльності учнів вказано, що учень має вміти розв'язувати ірраціональні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами. У програмі у темі «Тригонометричні рівняння і нерівності» передбачено, що учень має вміти формулювати означення обернених рівнянь, наприклад $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$; учень має вміти розв'язувати тригонометричні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами. У темі «Показникова та логарифмічна функції» передбачено, що учень має вміти розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння та нерівності, зокрема з параметрами.

Проаналізуємо програму зовнішнього незалежного оцінювання з математики 2021 року, затверджену Міністерством освіти і науки України, та виділимо зміст (рис. 2.1.) та компетентності з теми «Рівняння і нерівності», якими учень повинен володіти на момент складання ЗНО (рис. 2.2) [84].

Лінійні, квадратні, раціональні, ірраціональні, показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння і нерівності. Системи лінійних рівнянь і нерівностей. Системи рівнянь, з яких хоча б одне рівняння другого степеня.	рівняння з однією змінною, означення кореня (розв'язку) рівняння з однією змінною; - нерівність з однією змінною, означення розв'язку нерівності з однією змінною; - означення розв'язку системи рівнянь, основні методи розв'язування систем; - методи розв'язування найпростіших раціональних, ірраціональних, показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь та нескладних рівнянь, які зводяться до найпростіших; - методи розв'язування найпростіших лінійних, квадратних,
Розв'язування текстових задач за допомогою рівнянь та їх систем	раціональних, показникових, логарифмічних нерівностей та нескладних нерівностей, які зводяться до найпростіших

Рис. 2.1. Зміст навчального матеріалу програми ЗНО з математики 2021 року з теми «Рівняння і нерівності»

- розв'язувати рівняння і нерівності першого та другого степенів, а також рівняння і нерівності, що зводяться до них; - розв'язувати системи лінійних рівнянь і нерівностей, а також ті, що зводяться до них; - розв'язувати найпростіші рівняння, що містять дробові раціональні, степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні вирази; - розв'язувати найпростіші нерівності, що містять степеневі, показникові, логарифмічні вирази; - розв'язувати рівняння й нерівності, використовуючи означення та властивості модуля;	- розв'язувати рівняння й нерівності, що містять степеневі, показникові, логарифмічні та тригонометричні вирази; - розв'язувати ірраціональні рівняння й нерівності, а також їх системи; - користуватися графічним методом розв'язування й дослідження рівнянь, нерівностей та систем;
- застосовувати загальні методи та прийоми (розкладання на множники, заміна змінної, застосування властивостей і графіків функцій) у процесі розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем; - аналізувати та досліджувати рівняння, їх системи та нерівності залежно від коефіцієнтів; - застосовувати рівняння, нерівності та системи рівнянь до розв'язування текстових задач	- розв'язувати рівняння й нерівності та їх системи з параметрами

Рис. 2.2. Компетентності учнів з теми «Рівняння і нерівності» (програма ЗНО з математики 2021 року)

Бачимо, що вимоги не містять усього шкільного матеріалу з теми, але учень повинен мати значну кількість вмінь, якими він повинен оперувати. І при вивченні теми вчитель може зазначати, що ці вміння також відпрацьовуються в більш складних задачах, як, наприклад, тестові задачі, рівняння з параметрами. Звичайно не має гарантії, що задачі відповідні до тих, які зазначені в програмі будуть зустрічатись у самому ЗНО [56; 64].

Відповідно до програми ЗНО з математики за розділом «Рівняння і нерівності» розглянемо завдання ЗНО 2016-2021 років з метою виділення завдань саме даного розділу.

Отже, проаналізувавши завдання, які зустрічались на ЗНО з 2016 по 2021 рік, з'ясували, що вправи на розв'язування рівнянь та нерівностей обов'язково зустрічаються на рівні завдань з вибором однієї правильної відповіді, завдань відкритої форми з короткою та розгорнутою відповіддю, тобто якщо учень претендує на високий бал, то він повинен приділити увагу цій змістовій лінії.

2.2. Методичні рекомендації для підготовки учнів до виконання завдань ЗНО з математики бланку А

Тестування є розповсюдженою методикою перевірки навчальних досягнень учнів, крім того дозволяють готувати учнів до ЗНО під час навчального процесу. Для цього слід включати в зміст уроків тестові завдання різних форм (завдання з короткою відповіддю, тести множинного вибору, перехресного вибору), подібні до тих, що зустрічаються на ЗНО [56; 64].

Значну увагу учителям математики слід приділяти узагальненню та систематизації знань учнів. Такі уроки слід проводити і в межах як однієї теми, так і в межах шкільного курсу математики. Учитель має акцентувати увагу на розв'язуванні завдань, які викликають труднощі. До них можна віднести, зокрема, нерівності, текстові задачі. Аналіз тестових завдань ЗНО показує, що деякі формулювання не є зрозумілими для учнів. Тому під час підготовки необхідно приділяти увагу переформулюванню умови завдання. Те ж саме стосується і відповідей до завдань. Знайдені результати учень повинен вміти подавати в різній формі: указати найменший цілий розв'язок нерівності, знайти залежність між коренями рівняння тощо. Також слід уникати формального заучування учнями матеріалу [81].

Ці методичні рекомендації доцільно виконувати під час вивчення усіх видів рівнянь у старшій школі.

Розглянемо їх реалізацію на прикладі вивчення теми «Логарифмічні рівняння» [1; 2; 77; 88].

Формування вмінь та навичок розв'язування логарифмічних рівнянь ґрунтується на визначенні логарифма, властивостях логарифмічної функції і властивостях логарифма.

Розв'язати логарифмічне рівняння – це означає знайти всі його корені або довести, що рівняння коренів не має.

Найпростішим логарифмічним рівнянням називають рівняння виду

$$\log_a x = b, \text{ де } a > 0 \text{ і } a \neq 1.$$

Із цього рівняння за означенням логарифма випливає, що при будь-якому дійсному b рівняння має єдиний розв'язок $x = a^b$.

Розв'язування інших логарифмічних рівнянь ґрунтується на властивостях логарифмічної функції, означенні та властивостях логарифма.

Наприклад, із рівності $\log_a x = \log_a b$ на підставі означення логарифма і основної логарифмічної тотожності маємо:

$$x = a^{\log_a b} = b.$$

Варто звернути увагу учнів на те, що оскільки логарифмічна функція визначена лише на множині додатних чисел, то варто ще до розв'язування рівняння знайти область визначення виразів, що входять до складу рівнянь. Очевидно, наприклад, що рівняння $\lg(x - 5) = \lg(3 - x)$ не має розв'язків, оскільки значення x мають належати спільній частині областей визначення виразів $\lg(x - 5)$ і $\lg(3 - x)$, тобто множині розв'язків системи

$$\begin{cases} x - 5 > 0, \\ 3 - x > 0, \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x > 5, \\ x < 3. \end{cases}$$

Оскільки остання система не має розв'язків, то їх не має і дане логарифмічне рівняння.

Слід застерегти учнів від можливих порушень еквівалентності логарифмічних рівнянь внаслідок виконання тотожних перетворень.

Наприклад, якщо маємо рівняння $\lg x^2 = 3$, то, розв'язуючи його за означенням логарифма, дістаємо два розв'язки:

$$x^2 = 10^3,$$

$$x = \pm 10\sqrt{10}.$$

Якщо розв'язувати це рівняння, використовуючи твердження про логарифм степеня, то дістанемо:

$$2\lg x = 3,$$

$$\lg x = \frac{3}{2},$$

$$x = 10^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{10}.$$

У другому способі слід користуватися узагальненими формулами логарифмування, інакше відбувається втрата розв'язку, про що обов'язково слід наголошувати учням.

Навчати учнів розв'язувати логарифмічні рівняння слід починати з найпростіших [77].

Приклад 2.1. Розв'яжіть рівняння $\log_3(2x + 1) = 2$.

Розв'язання.

$$2x + 1 = 3^2,$$

$$2x = 8,$$

$$x = 4.$$

Перевірка: $\log_3(2 \cdot 4 + 1) = \log_3 9 = 2$.

Відповідь: 4.

Приклад 2.2. Розв'яжіть рівняння $\log_{x+1}(2x^2 + 1) = 2$.

Розв'язання.

За означенням логарифма маємо:

$$2x^2 + 1 = (x + 1)^2;$$

$$2x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1;$$

$$x^2 - 2x = 0;$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$

Перевірка:

1) значення $x_1 = 0$ не є коренем даного рівняння, оскільки основа логарифма $x + 1$ не повинна дорівнювати 1;

$$2) \log_{x+1}(2 \cdot 2^2 + 1) = \log_3 9 = 2.$$

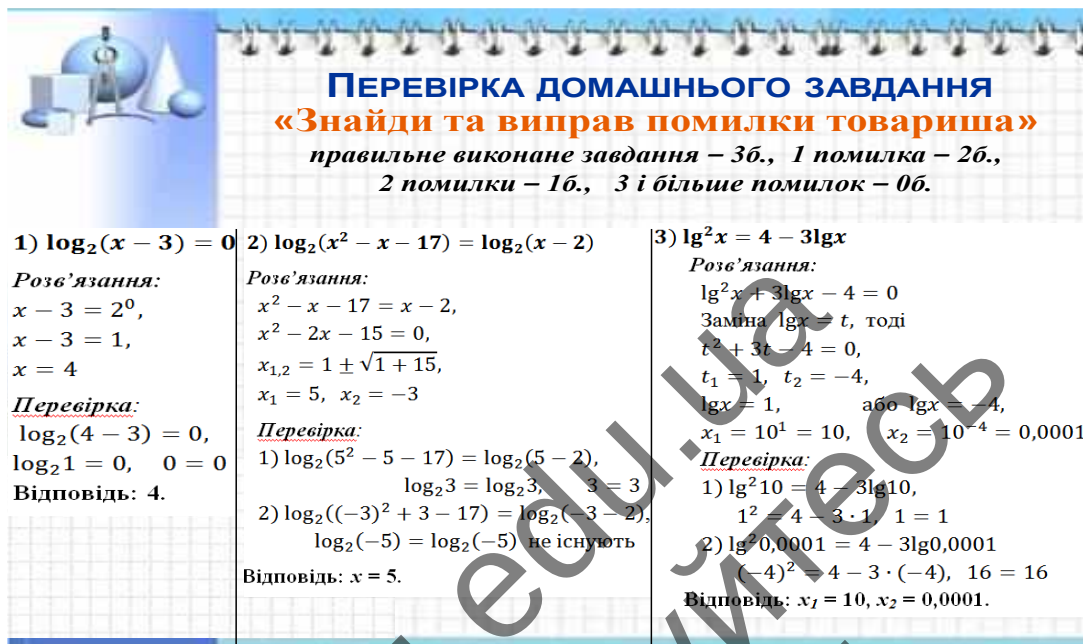
Відповідь: 2.

Доцільно також звести до системи основні способи розв'язування більш складних логарифмічних рівнянь. Такі рівняння можуть зустрічатися серед завдань з котторкою відповіддю [88].

1. Метод зведення логарифмічного рівняння до алгебраїчного.
2. Метод потенціювання.
3. Метод зведення логарифмів до однієї і тієї ж основи.
4. Метод логарифмування.

Крім того, при виборі формули для перетворення виразу логарифмічного рівняння під час його розв'язування, слід орієнтуватися на формули, які подані у довіднику до ЗНО [2].

Після вивчення учнями усіх видів логарифмічних рівнянь доцільно використовувати роботу в парах. Наприклад, учні обмінюються зошитами та перевіряють виконання домашнього завдання у один одного з виконаним завданням на слайді, при цьому оцінюючи роботу: правильне виконання завдання – 3б., 1 помилка – 2б., 2 помилки – 1б., 3 і більше помилок – 0б (рис. 2.3).



ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ
«Знайди та виправ помилки товариша»
 правильне виконання завдання – 3б., 1 помилка – 2б.,
 2 помилки – 1б., 3 і більше помилок – 0б.

1) $\log_2(x - 3) = 0$ <u>Розв'язання:</u> $x - 3 = 2^0$, $x - 3 = 1$, $x = 4$ <u>Перевірка:</u> $\log_2(4 - 3) = 0$, $\log_2 1 = 0$, $0 = 0$ Відповідь: 4.	2) $\log_2(x^2 - x - 17) = \log_2(x - 2)$ <u>Розв'язання:</u> $x^2 - x - 17 = x - 2$, $x^2 - 2x - 15 = 0$, $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + 15}$, $x_1 = 5$, $x_2 = -3$ <u>Перевірка:</u> 1) $\log_2(5^2 - 5 - 17) = \log_2(5 - 2)$, $\log_2 3 = \log_2 3$, $3 = 3$ 2) $\log_2((-3)^2 + 3 - 17) = \log_2(-3 - 2)$, $\log_2(-5) = \log_2(-5)$ не існують Відповідь: $x = 5$.	3) $\lg^2 x = 4 - 3\lg x$ <u>Розв'язання:</u> $\lg^2 x + 3\lg x - 4 = 0$ Заміна $\lg x = t$, тоді $t^2 + 3t - 4 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -4$, $\lg x = 1$, або $\lg x = -4$, $x_1 = 10^1 = 10$, $x_2 = 10^{-4} = 0,0001$ <u>Перевірка:</u> 1) $\lg^2 10 = 4 - 3\lg 10$, $1^2 = 4 - 3 \cdot 1$, $1 = 1$ 2) $\lg^2 0,0001 = 4 - 3\lg 0,0001$, $(-4)^2 = 4 - 3 \cdot (-4)$, $16 = 16$ Відповідь: $x_1 = 10$, $x_2 = 0,0001$.
---	---	--

Рис. 2.3. Фрагмент уроку – форма організації діяльності учнів
«Робота в парах»

Отже, методична схема підготовки учнів до розв'язування логарифмічних рівнянь під час складання ЗНО така [64]:

- 1) введення поняття логарифмічного рівняння;
- 2) повторення означення та основних властивостей логарифма, узагальнення та систематизація їх у вигляді схеми;
- 3) розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь за допомогою означення логарифма, зокрема у формі тестових завдань;
- 4) зведення до системи основних способів розв'язування більш складних логарифмічних рівнянь;
- 5) створення схеми узагальнення та систематизації відомостей з теми (рис. 2.4).

1. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь	
Орієнтир	Приклад
Якщо a — число ($a > 0$ і $a \neq 1$), то $\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c$ (використовуємо означення логарифма)	$\log_3(x - 1) = 2$. Розв'язання. $x - 1 = 3^2$; $x = 10$. Відповідь: 10

2. Використання рівнянь-наслідків	
Орієнтир	Приклад
Якщо з припущення, що перша рівність правильна, випливає правильність кожної наступної рівності, то гарантовано одержуємо рівняння-наслідок. При використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування	$\log_x(x+2)=2.$ Розв'язання. За означенням логарифма одержуємо: $x+2=x^2$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$. Перевірка. $x=-1$ — сторонній корінь (в основі логарифма одержуємо від'ємне число); $x=2$ — корінь ($\log_2(2+2)=2$, $\log_2 4=2$, $2=2$). Відповідь: 2
3. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь	
ЗАМІНА ЗМІННИХ	
Орієнтир	Приклад
Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною)	$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0.$ Розв'язання. Заміна: $\lg x = t$. $t^2 - 2t - 3 = 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Отже, $\lg x = -1$ або $\lg x = 3$. Тоді $x = 10^{-1} = 0,1$ або $x = 10^3 = 1000$. Відповідь: 0,1; 1000
РІВНЯННЯ ВИДУ $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$ і $a \neq 1$)	
Орієнтир	Приклад
$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ ОДЗ}$ (враховуємо ОДЗ і прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів)	$\log_4(x^2 - 2) = \log_4(4x - 5).$ Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$ На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням: $x^2 - 2 = 4x - 5; x^2 - 4x + 3 = 0;$ $x_1 = 1, x_2 = 3.$ $x = 1$ — сторонній корінь (не задовольняє умови ОДЗ); $x = 3$ — корінь (задовольняє умови ОДЗ). Відповідь: 3

Рис. 2.4. Схема узагальнення та систематизації відомостей з теми «Логарифмічні рівняння»

Аналогічні методичні схеми доцільно використовувати до підготовки учнів до розв'язування інших видів рівнянь (лінійних, квадратних, дробових, ірраціональних, тригонометричних, показникових) під час ЗНО.

Головною особливістю підготовки учнів до розв'язування різних видів рівнянь та нерівностей під час ЗНО є те, що ця робота не повинна здійснюватися тільки в 10-11 класах. Необхідно починати з 7 класу, оскільки

вивчення лінійних рівнянь забезпечує програма 7 класу, а квадратних рівнянь— програма 8 класу тощо. Особливо це стосується нерівностей, оскільки ця змістова лінія зосереджена у 9 класі, де вивчаються лінійні, квадратні нерівності та їх системи і саме завдання на розв'язування цих видів нерівностей переважно пропонується під час ЗНО [64].

Тому надалі розглянемо особливості підготовки учнів до розв'язування різних видів нерівностей під час ЗНО [64].

Основні класи нерівностей та їх систем вивчаються незалежно один від одного і внаслідок поступового розширення кількості вивчених класів нерівностей та їх систем формуються загальні, універсальні прийоми їх розв'язування. У результаті такого вивчення матеріал представляється учням у порівняно компактному вигляді [2].

Відзначимо ряд особливостей у вивченні раціональних нерівностей [1].

1) Як правило, навички розв'язування нерівностей, за виключенням квадратних, формуються на менш високому рівні, ніж рівнянь відповідних класів.

2) Більшість прийомів розв'язування нерівностей полягає в переході від даної лінійної нерівності до лінійного рівняння і наступний перехід від знайдених коренів рівняння до множини розв'язків вихідної нерівності. Такий перехід не виконується лише при розгляді лінійних нерівностей, оскільки в цьому немає необхідності через простоту процесу розв'язування таких нерівностей.

3) У вивченні нерівностей велику роль відіграють наочно-графічні засоби. Тож успішність вивчення раціональних нерівностей залежить від якості вивчення функціональної лінії шкільного курсу (побудови графіків і графічного дослідження функцій).

Перераховані особливості показують, що вивчення попереднього матеріалу сильно впливає на вивчення раціональних нерівностей. Тому роль етапу синтезу у вивченні нерівностей особливо зростає [2].

Практика показує, що з розв'язуванням нерівностей пов'язана більша частина помилок учнів на ЗНО. У переважній більшості випадків розв'язування нерівностей, що пропонуються на екзаменах державної підсумкової атестації та ЗНО, не потребує якої-небудь винахідливості, штучних прийомів, і тому учні, як правило, одразу бачать, які методи використовувати для розв'язування. Проте багато з них, виконуючи перетворення, роблять грубі помилки, пов'язані з незнанням основних теоретичних положень. Розв'язування нерівності не потребує практично нічого, крім вміння учня звести його до розв'язування найпростіших нерівностей, не допустивши при цьому ні втрати розв'язків, ні придбання зайвих розв'язків. Для цього потрібно знати властивості функцій, що вивчаються у школі, і володіти основними поняттями, пов'язаними з рівносильністю нерівностей. Основні поняття, необхідні для розв'язування нерівностей (невідоме, рівносильність, логічне слідування та ін.), нагадують відповідні означення для рівнянь [79].

Особливість вивчення числових, лінійних нерівностей з однією змінною, квадратних нерівностей полягає в тому, що порівняно з іншими класами нерівностей, вони вивчаються з великою ретельністю, для них також вказується і доводиться до автоматизму виконання алгоритмів розв'язування, вказується форма, в якій повинна бути записана відповідь [42].

Вивчення лінійних нерівностей починається з формулювання загального означення понять «більше», «менше» або «дорівнює», яке є узагальненням правил порівняння дійсних чисел, які було вивчено протягом попередніх років навчання. При вивченні цього питання слід наголосити на тому, що сформульоване означення є універсальним, тобто може бути використане не тільки для порівняння будь-якого виду чисел, але й для порівняння виразів. Оскільки дана тема є новою для учнів, то доцільно використати абстрактно-дедуктивний метод введення понять, оскільки цей спосіб потребує менше часу для пояснення і залишає більше часу для розгляду прикладів, хоча і потребує від учнів певного рівня математичної

підготовки. Після формулювання означення вчитель має провести роботу зі систематизації знань учнів про види нерівностей: вони поділяються за знаком та за змістом [28].

При цьому можна провести паралелі з видами числових рівностей (такі паралелі бажано проводити і під час вивчення властивостей числових нерівностей), тобто учні мають усвідомити, що нерівності, так само, як і рівності, – це записи певного виду, але за змістом вони поділяються на правильні та неправильні. З розгляду видів нерівностей цілком логічно випливає питання про доведення того факту, що дана нерівність є правильною (або визначення правильності чи неправильності даної нерівності).

Для свідомого сприйняття учнями логіки навчального процесу вчитель може провести бесіду (або організувати відповідним чином самостійну роботу учнів з порівняння), у ході якої проводитимуться паралелі між поняттями «рівності» та «нерівності», а звідси цілком логічним буде перехід до понять «рівняння» та «нерівняння». Фрагмент бесіди наведено нами у додатку В [64].

Також вчитель може запропонувати вправу на порівняння чисел в Інтернет-сервісі мультимедійних дидактичних вправ LearningApps (рис.2.4).

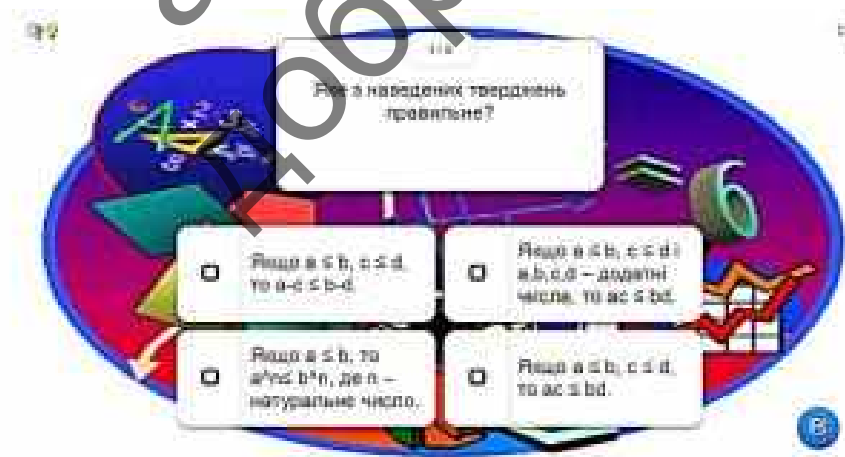


Рис. 2.4. Тест на вибір правильної відповіді в LearningApps

За допомогою таких інтерактивних завдань учні можуть перевірити і закріпити свої знання з теми в ігровій формі, що сприяє формуванню їх пізнавального інтересу. Після досить докладного вивчення означення, властивостей числових нерівностей учні переходять до вивчення нового виду нерівностей в темі «Лінійні нерівності з однією змінною. Системи нерівностей з однією змінною». У процесі вивчення лінійних нерівностей учні мають навчитись наводити приклади виразів нерівності [31].

Також важливою навичкою є вміння розв'язувати вправи, що передбачають: почленне додавання і множення нерівностей; розв'язування нерівності зі змінною; рівносильні перетворення; об'єднання числових проміжків; розв'язування лінійних нерівностей; розв'язування систем двох нерівностей з однією змінною. Вивчення теми починається з формування поняття лінійної нерівності з однією змінною та загальної схеми її розв'язування (рис. 2.5) [64].

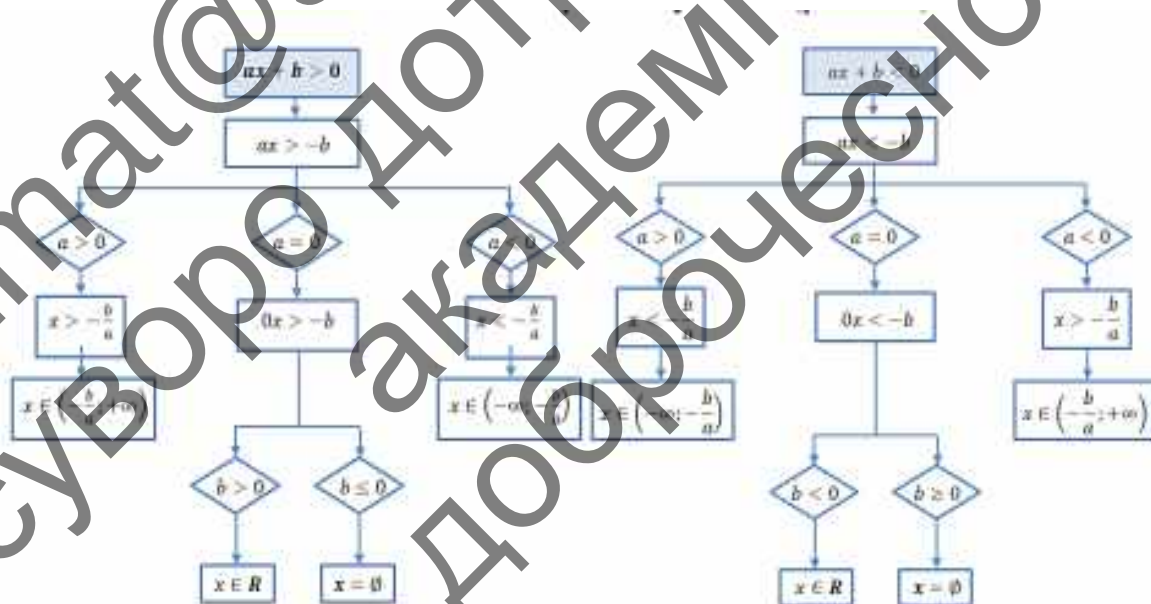


Рис. 2.5. Схеми розв'язування лінійних нерівностей $ax+b>0$ і $ax+b<0$

Розвиток дослідницької і логічної компетентності учнів вчитель може здійснювати вже на етапі застосування знань і формування умінь шляхом створення проблемної ситуації. Розглянемо конкретні приклади.

Приклад 1.1. Розв'язати нерівність $5x + 7 > 3(2x - 5) - x$.

Розв'язання

Розкриємо дужки в правій частині нерівності: $5x + 7 > 6x - 15 - x$.

Перенесемо невідомі доданки в одну сторону з протилежним знаком, а числа – в іншу: $5x - 6x + x > -7 - 15$.

Зведемо подібні доданки: $0x > -22$.

Отримали нерівність, рівносильну початковій. Багато хто з учнів одразу записують у відповідь, що нерівність не має розв'язків, оскільки плутають з розв'язанням лінійного рівняння $0x = -22$, де розв'язком справді є порожня множина. Проте ланцюг міркувань при розв'язуванні нерівностей дещо відрізняється. Тому вчитель має пояснити учням, що розв'язком нерівності буде будь-яке число, оскільки нуль завжди більше від'ємного числа (в лівій частині при множенні на нуль незалежно від значення x завжди буде нуль).

Отже, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Відповідь: $\mathbb{R}$.

Після розгляду цих прикладів учні приходять до висновку, що нерівності вигляду $0x > b$, $0x \geq b$, $0x < b$, $0x \leq b$ або не мають розв'язку, або їх розв'язком є будь-яке число.

Під час розв'язування лінійних нерівностей вчитель слідкує за тим, щоб учні розуміли залежність між знаком нерівності та виглядом точки на координатній прямій і дужок в записі інтервалу для відповіді (табл. 2.1).

Табл.2.1

Види позначень в залежності від знака нерівності

Знак нерівності	Вигляд точки на координатній прямій	Вигляд дужки в записі інтервалу
$>$ $<$	Виколота точка 	$(,)$
$\geq$ $\leq$	Зафарбована точка 	$[,]$

Доречно запропонувати учням вправу на знаходження відповідності в Інтернет-сервісі мультимедійних дидактичних вправ LearningApps (рис. 2.6).

Завдання 1.3. Кожній нерівності поставте у відповідність її розв'язок.

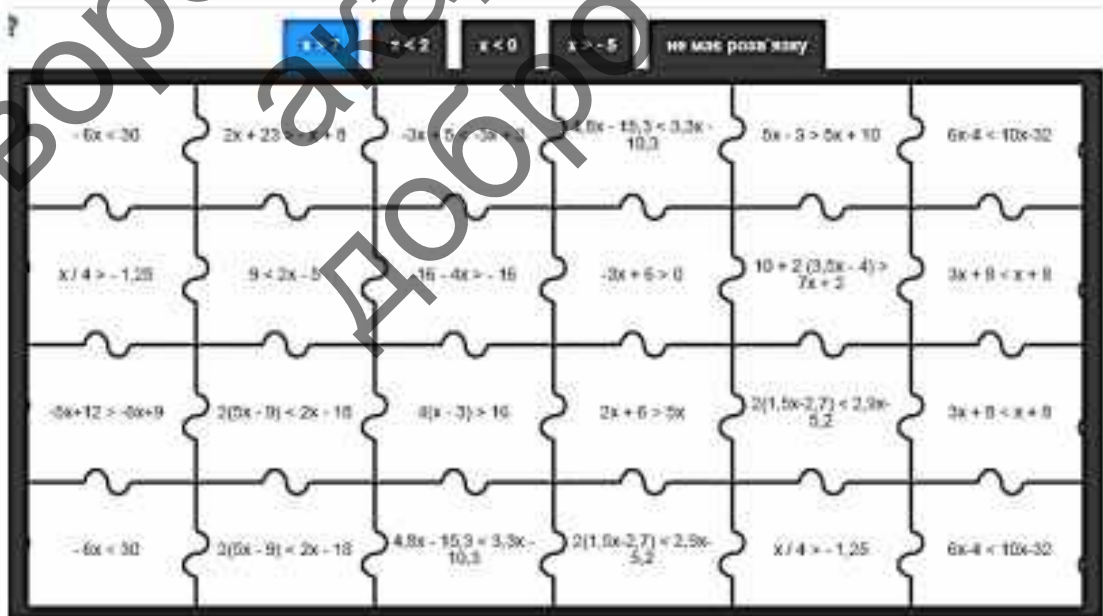


Рис. 2.6. Вікно виконання вправи в LearningApps

Після вибору учнем на вкладці потрібної категорії пазли, що їй відповідають, розкриваються (зникають). Тому учень повинен бути уважним і зібраним, оскільки від якості виконання цієї вправи залежить його оцінка. Перевага цієї вправи полягає у тому, що чіткість та однозначність умов завдання забезпечує рівність у сприйнятті їх змісту, а також є можливість одночасної перевірки знань усіх учнів класу, оскільки нерівності вже виведені на екран і вчитель може організувати роботу таким чином, щоб учні по черзі виходили до дошки для розв'язання нерівності та обрання відповідної відповіді в сервісі LearningApps [18]. Вчитель має показати, як при розв'язуванні нерівності виконання тотожних перетворень може призвести до втрати розв'язків, проводячи паралель з розв'язуванням рівнянь. Зокрема, звільнення від знаменника не призводить до втрати коренів у рівнянні, а зайві корені можуть з'явитися лише за рахунок розширення ОДЗ, тобто при внесенні в ОДЗ тих значень невідомого, які перетворюють знаменник в нуль. Багато з учнів вважають, що така ситуація застосовна і до нерівностей.

Тому, наприклад, нерівність $\frac{1}{x} \geq 1$ вони розв'язують, переходячи після звільнення від знаменника до нерівності $x < 1$. Після цього вони стверджують, що всі значення і будуть розв'язками вихідної нерівності, так як при жодному з них знаменник вихідної нерівності не перетворюється в нуль.

Однак легко бачити, що вихідна нерівність справедлива і при усіх від'ємних x . Але всі ці розв'язки втрачаються через те, що звільнення від знаменника в нерівності відбувається зовсім не так, як у рівняннях. Для нерівностей характерна така властивість: при множенні обох частин нерівності на один і той самий додатний вираз знак нерівності не міняється, а при множенні на від'ємний змінюється на протилежний.

Таким чином, основна діяльність, пов'язана з розв'язуванням лінійних нерівностей спрямована на відпрацювання таких кроків [88]:

- 1) звільнення від дробів (якщо вони присутні в нерівності) шляхом множення на найменший спільний знаменник;
- 2) розкриття дужок (якщо вони є) та перенесення з протилежним знаком невідомих в одну сторону, а відомих – в іншу;
- 3) зведення подібних доданків і ділення обох частин нерівності на відмінний від нуля коефіцієнт біля x .

Вивчення теми «Квадратні нерівності» починається з формування знань учнів про зміст поняття «квадратна нерівність» та формування первинних умінь вирізняти квадратні нерівності серед інших нерівностей з однією змінною, тому почати слід з означення та прикладів (додаток Г).

На етапі формування умінь розв'язувати квадратні нерівності за вивченою схемою слід вимагати від учнів чіткого виконання наступних дій: зведення нерівності до виду квадратної; відшукування дійсних коренів квадратного тричлена (якщо вони існують) та побудова ескізу графіка квадратичної функції; запис проміжку, на якому функція набуває знака, що відповідає даній квадратичній нерівності (з урахуванням строгості знака нерівності).

Зміст вправ, запропонованих до розв'язування на уроці, може бути таким [7]:

- 1) знайти розв'язки квадратної нерівності за готовим графіком відповідної квадратичної функції;
- 2) розв'язати за вивченою схемою квадратні нерівності;
- 3) розв'язати нерівності другого степеня, що зводяться до квадратних рівносильними перетвореннями;
- 4) на повторення: дослідити властивості функції за даним графіком.

По закінченню вивчення квадратних нерівностей учні мають: формулювати означення квадратної нерівності; знати, що означає розв'язати нерівність та що є розв'язком квадратної нерівності; розуміти скільки розв'язків може мати квадратна нерівність; наводити приклади квадратних нерівностей, які: не мають жодного розв'язку; мають тільки один розв'язок;

задовольняють усі дійсні числа; знати різні способи розв'язування квадратних нерівностей.

Розв'язування систем та сукупностей раціональних нерівностей заслуговує особливої уваги, оскільки це комплексна навчально-математична діяльність, яка передбачає володіння учнем такими знаннями та вміннями [64]:

- а) розуміння сутності понять «система нерівностей», «сукупність нерівностей»;
- б) володіння різними методами та прийомами розв'язування окремих видів нерівностей;
- в) вміння планувати та реалізовувати сплановану діяльність, пов'язану з розв'язуванням систем та сукупностей нерівностей;
- г) вміння зображати числові множини, що є розв'язками окремих нерівностей, знаходити їх перерізи та об'єднання і формулювати відповідь.

Уперше учні знайомляться з системами та сукупностями раціональних нерівностей в 9 класі, коли вивчають тему «Системи лінійних нерівностей з однією змінною». У подальшому учні стикаються з завданнями на розв'язування систем квадратних нерівностей. Для усвідомлення учнями необхідності у вивченні способів розв'язування систем та сукупностей нерівностей з однією змінною вчитель може запропонувати на етапі мотивації навчальної діяльності розв'язати конкретний приклад. Якщо на попередніх уроках вчителю вдалося сформувати в учня чітке уявлення про зміст понять: переріз та об'єднання числових проміжків, лінійна нерівність, квадратна нерівність, розв'язок нерівності з однією змінною, а також сталі навички розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною і квадратних нерівностей та рівносильних перетворень нерівностей, то при розв'язуванні систем та сукупностей цих нерівностей в учнів не повинно виникати труднощів.

Перед вивченням нового матеріалу доречно актуалізувати основні необхідні знання та вміння, набуті учнями протягом попередніх уроків.

Після цього за допомогою конкретних прикладів вчитель має показати усі можливі розв'язки систем лінійних нерівностей (табл.2.2).

Таблиця 2.2.

Можливі випадки розв'язків систем лінійних нерівностей

Системи лінійних нерівностей ($a > b$)	Розв'язок та його геометрична ілюстрація	Приклад
$\begin{cases} x > a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (a; +\infty)$	$\begin{cases} x > 3, \\ x > 2 \end{cases}$  $x \in (3; +\infty)$
$\begin{cases} x < a, \\ x < b \end{cases}$	 $x \in (-\infty; b)$	$\begin{cases} x < 5, \\ x < 2 \end{cases}$  $x \in (-\infty; 2)$
$\begin{cases} x < a, \\ x > b \end{cases}$	 $x \in (b; a)$	$\begin{cases} x < 4, \\ x > 1 \end{cases}$  $x \in (1; 4)$
$\begin{cases} x > a, \\ x < b \end{cases}$	 Розв'язків немає	$\begin{cases} x > 6, \\ x < 3 \end{cases}$  Розв'язків немає

Після виконання певної кількості прикладів учні засвоюють алгоритм розв'язання систем і сукупностей нерівностей з однією змінною, тому вчитель має проконтролювати, щоб учні записали послідовність кроків

розв'язування систем і сукупностей нерівностей в зошити та відобразили в опорному конспекті конкретні приклади (табл.2.3).

Таблиця 2.3

Основні кроки розв'язування систем та сукупностей нерівностей

Основні кроки розв'язування системи нерівностей з однією змінною

1. Розв'язати кожну нерівність системи.
2. Зобразити множини розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій.
3. Знайти переріз числових проміжків, записати відповідь.

Приклад. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} 3x + 4 < 6, \\ 2x + 7 \geq 4. \end{cases}$

Розв'язання

$$\begin{cases} 3x + 4 < 6, \\ 2x + 7 \geq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x < 6 - 4, \\ 2x \geq 4 - 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x < 2, \\ 2x \geq -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{2}{3}, \\ x \geq -1,5; \end{cases} \quad (\text{див. рисунок})$$



Відповідь: $x \in [-1,5; \frac{2}{3})$.

Основні кроки розв'язування сукупності нерівностей з однією змінною

1. Розв'язати кожну нерівність сукупності.
2. Зобразити множини розв'язків кожної нерівності на одній координатній прямій.
3. Знайти об'єднання числових проміжків, записати відповідь.

Приклад. Знайти розв'язок сукупності нерівностей $\begin{cases} 3x - 5 > 7, \\ 2x + 3 < 3. \end{cases}$

Розв'язання

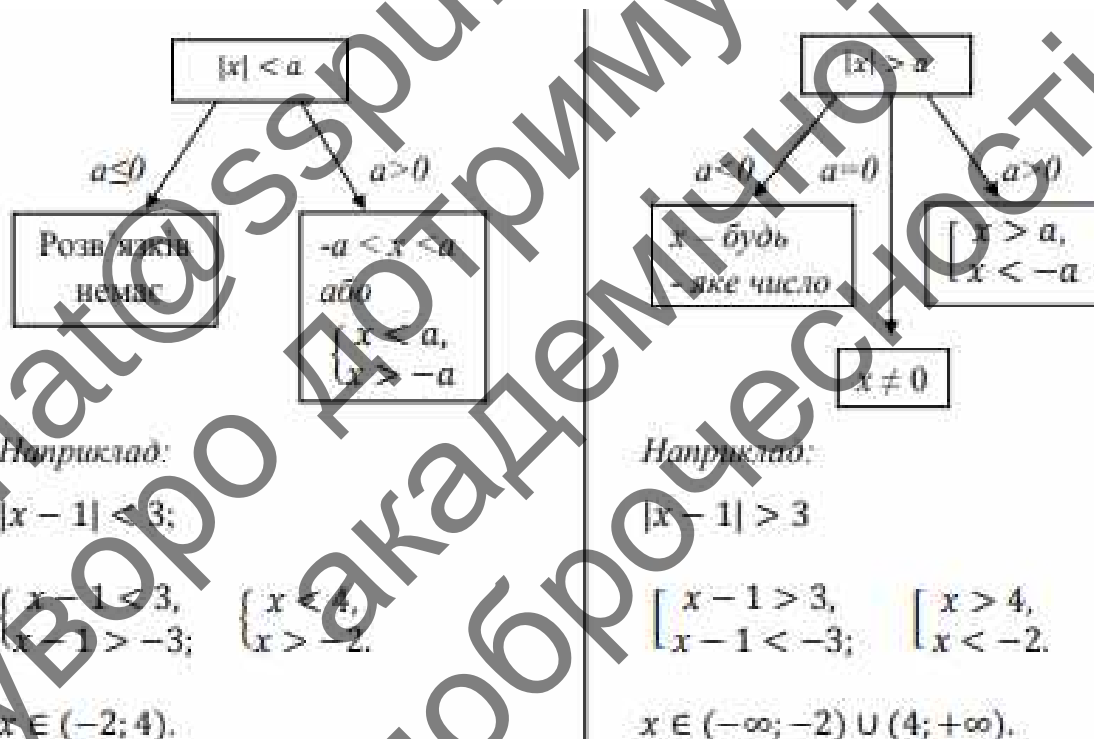
$$\begin{cases} 3x - 5 > 7, \\ 2x + 3 < 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 7 + 5, \\ 2x < 3 - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 12, \\ 2x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 4, \\ x < 0. \end{cases} \quad (\text{див. рисунок})$$



Відповідь: $x \in (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

На етапі формування умінь учнів розв'язувати системи та сукупності нерівностей завдання слід підбирати таким чином, щоб показати учням якомога більше різних випадків їх розв'язків (наприклад, коли одна з нерівностей взагалі не має розв'язків або її розв'язком є вся числова пряма і т.д.). Доречно також обговорити з учнями питання про використання систем нерівностей з однією змінною для розв'язування подвійних нерівностей [64].

Відмінності у розв'язанні систем і сукупностей нерівностей можна показати, дослідивши розв'язки найпростіших нерівностей з модулем.



Приклад 1.8. Визначити, при яких значеннях змінної має зміст вираз

$$\sqrt{2x+3} - \frac{1}{\sqrt{9-2x}}.$$

Розв'язання

Вираз $\sqrt{2x+3} - \frac{1}{\sqrt{9-2x}}$ має зміст, коли підкореневі вирази невід'ємні і знаменник не дорівнює 0, тобто виконується система:

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0, \\ 9-2x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x \geq -3, \\ -2x > -9; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1,5, \\ x < 4,5; \end{cases} \quad x \in [-1,5; 4,5).$$

Відповідь: $[-1,5; 4,5).$

На завершальному етапі вивчення даної теми для перевірки учнями власного рівня засвоєння навчального матеріалу доречно запропонувати їм такі вправи:

1. Що означає «розв'язати систему (сукупність) нерівностей»?

Опишіть дії, які треба виконати, щоб отримати розв'язок системи (сукупності) нерівностей.

2. Розв'яжіть систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} 0x < 15, \\ x > 6; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0x > -13, \\ x < 6; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 0x > 15, \\ x > 6 \end{cases}$$

3. Кожну з нерівностей замініть рівносильною системою або сукупністю нерівностей:

$$1) |x| > 3; \quad 2) |x| \leq 3; \quad 3) |x - 2| \geq 2; \quad 4) |x - 3| \leq 1.$$

3. Дано систему $\begin{cases} x \geq a, \\ x > 3. \end{cases}$

При яких a розв'язком системи є проміжок:

$$1) (3; +\infty); \quad 2) (4; +\infty); \quad 3) (3; 4)?$$

Одним з важливих методів розв'язування нерівностей є метод інтервалів. Це не універсальний метод, але він дуже зручний при розв'язуванні раціональних і дробово-раціональних нерівностей. Покажемо, в чому полягає перевага методу інтервалів перед іншими методами розв'язування раціональних нерівностей на конкретному прикладі [77].

Приклад 2.1. Розв'язати нерівність: $(x - 5)(x + 3) > 0$.

Багато учнів зводять цю нерівність до сукупності двох систем (множники обидва більше нуля або обидва менші за нуль):

$$\begin{cases} (x-5) > 0 \\ (x+3) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (5; +\infty).$$

Або ж учні розкривають дужки у нерівності $(x - 5)(x + 3) > 0$, отримуючи квадратну нерівність:

$$x^2 - 2x - 15 > 0$$

Далі вони бачать, що в лівій частині нерівності квадратична функція, графіком якої є парабола, яка перетинає вісь Ox в точках $x = 5$ і $x = -3$ (рис.2.14). Вітки параболи направлені вгору, оскільки старший коефіцієнт дорівнює 1 (> 0).

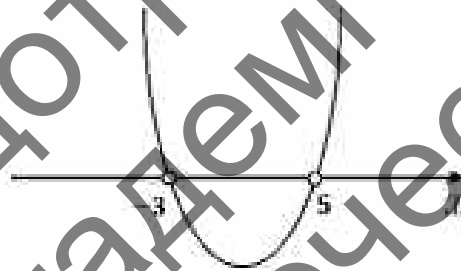


Рис.2.14.

Функція більше нуля там, де її графік проходить вище осі Ox . Отже, це інтервали $(-\infty; -3)$ і $(5; +\infty)$. Їх об'єднання і буде розв'язком нерівності.

Ми розглянули два шляхи розв'язування однієї і тієї ж нерівності. Обидва вони досить громіздкі, оскільки в першому випадку виникає сукупність систем нерівностей, а для розв'язування нерівності другим шляхом учню треба пам'ятати графік квадратичної функції, залежність його розташування [64].

Вивчення нерівностей відбувається у три етапи: від незалежного вивчення основних класів нерівностей та поступового розширення їх кількості до формування узагальнених прийомів розв'язування нерівностей.

Змістово-методична лінія рівнянь і нерівностей має тісні зв'язки з іншими лініями ШКМ, зокрема з числовою та функціональною. У вивченні нерівностей особливу роль відіграє логічне мислення, оскільки зміст кожної теми складається з ланцюжка понять, пов'язаних між собою логічними відношеннями. Тому одним з головних завдань вчителя є створення умов для формування логічної компетентності учнів.

Серед нерівностей, що вивчаються у 10-11 класах, до завдань ЗНО найчастіше включаються логарифмічні нерівності [88].

Логарифмічними називаються нерівності, що містять змінну під знаком логарифма [34; 55; 70; 90]. Найпростішими логарифмічними нерівностями називають нерівності виду $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, де $a > 0, a \neq 1$.

Теоретичною основою розв'язування цих логарифмічних нерівностей є властивість монотонності логарифмічної функції. Як відомо, логарифмічна функція $y = \log_a x$ зростає на всій області визначення при $a > 1$, спадає – при $0 < a < 1$. Із зростання функції $y = \log_a x$ у першому випадку і спадання – у другому випадку випливає:

$$1) \text{ при } a > 1 \text{ нерівність } \log_a x_2 > \log_a x_1 \text{ рівносильна системі } \begin{cases} x_2 > x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$$

$$2) \text{ при } 0 < a < 1 \text{ нерівність } \log_a x_2 > \log_a x_1 \text{ рівносильна системі } \begin{cases} x_2 < x_1, \\ x_1 > 0, \\ x_2 > 0. \end{cases}$$

Тобто у першому випадку більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента і, переходячи в нерівності від значень функції до значень аргументу, тобто підлогарифмічних виразів, учні мають залишити той самий знак нерівності. У другому випадку більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента, тому переходячи в нерівності від значень функції до значень аргументу, тобто підлогарифмічних виразів, учні мають змінити знак нерівності на протилежний.

Як правило, більш складні логарифмічні нерівності зводиться до нерівностей виду: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, де $a > 0, a \neq 1$.

Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\text{нерівностей: } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x). \end{cases}$$

Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі

$$\text{нерівностей: } \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

Слід обов'язково наголосити учням, що дані системи враховують вимогу знаходити область визначення виразів, які входять до складу нерівностей.

Розглянемо приклади.

Приклад 2.4. Розв'яжіть нерівність $\log_2 x < 3$.

Розв'язання.

Оскільки $3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$, то запишемо дану нерівність у вигляді $\log_2 x < \log_2 8$.

Оскільки функція $y = \log_2 x$ зростаюча при $x > 0$, то маємо: $\begin{cases} x < 8, \\ x > 0; \end{cases}$ отже, $0 < x < 8$ (рис.).



Рис. Ілюстрація до завдання.

Відповідь: $(0; 8)$.

Приклад 2.5. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{3}} x \leq -2$.

Розв'язання.

Запишемо дану нерівність у вигляді: $\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} 9$.

Оскільки функція $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ спадна при $x > 0$, маємо: $\begin{cases} x \geq 9, \\ x > 0; \end{cases}$

Отже, отримали, що $x \geq 9$ (рис.).



Рис. Ілюстрація до завдання.

Відповідь: $[9; +\infty)$.

Приклад 2.6. Розв'яжіть нерівність: $\log_{0,5}(x^2 + x) > -1$.

Розв'язання.

Оскільки $-1 = \log_{0,5} 0,5^{-1} = \log_{0,5} 2$, то $\log_{0,5}(x^2 + x) > \log_{0,5} 2$.

Одержана нерівність рівносильна системі:

$$\begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x \leq 2; \end{cases} \begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x^2 + x - 2 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} x(x+1) > 0, \\ (x+2)(x-1) \leq 0. \end{cases}$$

Розв'язком першої нерівності (рис.) є проміжок $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.



Рис. Ілюстрація до завдання.

Розв'язком другої нерівності (рис.) є відрізок $[-2; 1]$.



Рис. Ілюстрація до завдання.

Тоді маємо (рис.) остаточно, що $x \in [-2; -1) \cup (0; 1]$.



Рис. Ілюстрація до завдання.

Відповідь: $[-2; -1) \cup (0; 1]$.

Отже, методична схема навчання учнів розв'язувати логарифмічні нерівності така:

- 1) введення поняття логарифмічної нерівності;
- 2) повторення основних властивостей логарифмічної функції;

- 3) введення схеми заміни найпростіших логарифмічних нерівностей рівносною системою нерівностей;
- 4) наведення прикладів розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей методом заміни змінних;
- 5) створити схему узагальнення і систематизації теми.

Отже, можемо створити такі методичні рекомендації щодо підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО бланку А:

- 1) використовувати такі методи та форми, як навчання у співробітництві, метод проєктів, індивідуальні консультації, робота в малих групах і парах, цифрові технології;
- 2) значну увагу приділяти узагальненню та систематизації знань учнів;
- 3) зосередити увагу учнів на розв'язуванні завдань, які найчастіше викликають труднощі;
- 4) приділяти увагу вмінню формулювати та перефразовувати умови та вимоги до завдань;
- 5) необхідно формувати в учнів уміння правильно записувати відповіді до завдань з урахуванням умови;
- 6) уникати формального заучування учнями навчального матеріалу;
- 7) включати в зміст уроків кожного року навчання тестові завдання різних форм, аналогічні до тих, що зустрічаються на зовнішньому незалежному оцінюванні.

2.3. Методичні рекомендації для підготовки учнів до виконання завдань бланку Б.

Друга частина ЗНО істотно відрізняється від першої. Основна відмінність полягає в наступному.

1. Пропонується завдання без варіантів відповіді. У кожному завданні слід її не лише знайти, але й записати детальне пояснення до процесу

розв'язування з повним обґрунтуванням кожного кроку чи етапу розв'язування.

2. Завдання даної частини більш складні. Складність завдань пов'язана з тим, що розв'язок кожної задачі передбачає, як правило, розв'язання двох - трьох стандартних завдань, об'єднаних одним формулюванням. Наприклад, пропонується не просто розв'язати рівняння, а до цієї частини ЗНО включені рівняння та нерівності, що містять параметри.

3. При виконанні завдань другої частини можна використовувати будь які факти, навіть маловідомі в шкільній практиці, сміливо користуватися ними для економії часу та раціоналізації розв'язання [64].

У ході проведення зовнішнього незалежного оцінювання виявилось, що в учнів недостатньо розвинені навички виконувати математичні записи, що призводять до втрати балів завдань з розгорнутою відповіддю (більшою мірою це стосується саме завдань з параметрами). Тому вчителям слід проаналізувати критерії оцінювання завдань з розгорнутою відповіддю та приділяти більше уваги формуванню в учнів математичної культури записів під час уроку [64].

Рівняння, нерівність або їх система, що містять параметр – це таке рівняння, нерівність або їх система, що містять у своєму записі буквені коефіцієнти, які є величинами, значення яких не вказано, і їх позиціонують як невідомі, що задані на деякій числовій множині [2].

Наприклад, є рівняння $2x - a = 0$ із змінною x та параметром a . Величина a може бути будь-яких значенням. Це можуть бути і такі значення: $\frac{1}{2}$; -100; 55.02; $\sqrt{2}$; $\lg 5$ та ін.

Рівняння може бути різного вигляду, все залежить від значення параметра a . Наприклад: $2x - \frac{1}{2} = 0$, $2x + 100 = 0$, $2x - 55.02$, $2x - \sqrt{2}$, $2x - \lg 5 = 0$. Припустимо, ми маємо нерівність виду $by^2 - 2y + 6b - 10 < 0$. Часто

для завдання нерівності обумовлюють величини змінної та параметру. Якщо y це змінна, а b – параметр, то ця нерівність або квадратична при $b \neq 0$ відносно змінної y , або лінійною при $b = 0$ відносно змінної y .

Параметр може приймати різноманітні значення, в залежності від цих значень, ми можемо мати наступні нерівності: $y^2 - 2y - 4 < 0$ (при $b = 1$), $-5y^2 - 2y - 40 < 0$ (при $b = -5$) та ін. Якщо b – змінна, y – параметр, то ця нерівність лінійна відносно змінної b . Нерівності які ми отримаємо, залежать від значень параметра, наприклад такі: $6b - 10 < 0$ (при $y = 0$), $15b - 1 < 0$ (при $y = 3$).

Нерівності виду $f(x, a) > g(x, a)$, $f(x, a) < g(x, a)$, $f(x, a) \geq g(x, a)$, $f(x, a) \leq g(x, a)$ з двома змінними a, x , де $f(x, a)$ і $g(x, a)$ – аналітично задані функції, будемо називати нерівностями зі змінною x та параметром a , якщо у нерівності задача ставиться так:

- 1) або для кожного значення a із деякої множини розв'язати нерівність відносно x ;
- 2) або знайти значення a , для яких виконується певна вимога, що сформульована для розв'язків нерівності відносно x .

Завдання з параметром класифікують на групи за різними ознаками:

1. Залежить під знаком якої функції знаходиться змінна у рівнянні, нерівності або системі. Це завдання можна віднести до певного розділу математики. Ми можемо визначити вид означення, користуючись ним. Наприклад $\log_2(x^2 + ax) = 1$ – логарифмічне рівняння з параметром a , $\sin(mx-3) < m$ – найпростіша тригонометрична нерівність із параметром m -
$$\begin{cases} (k-2)x + 2y = 4 + 3k \\ x + (k-3)y = 8 \end{cases}$$
 – система лінійних рівнянь із параметром k .

Залежно від того, чи відома орієнтована схема розв'язування завдання з параметром, їх можна розділити на стандартні (типові) та нестандартні. Наприклад: нехай тригонометричне рівняння це типове рівняння із параметром $(a-4)\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x + (a+1)\cos^2 x = 0$ з параметром a .

Обґрунтуємо: це однорідне рівняння другого степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$. Якщо параметр є причиною ускладнення визначення виду рівняння, то замість нього підставити числове значення, потім без зусиль визначити вид рівняння та повернутися до рівняння з параметром.

2. Рівняння з параметрами поділяються ще за вимогою задачі.

1) Розв'язати рівняння для кожного значення параметра, тобто знайти значення змінних для кожного параметра.

2) Знайти значення параметра, якщо є спеціальні умови. Наприклад:

- знайти значення параметра, при яких множина розв'язків буде розташована певним чином на числовій осі;

- знайти значення параметра, при яких рівняння має задану кількість розв'язків; знайти значення параметра, для якого рівняння справджується для будь-якого дійсного значення змінної;

- знайти значення параметра рівняння, коли справджується для будь-якого дійсного значення змінної, яке належить заданому проміжку;

- знайти значення параметра, при якому з одного рівняння випливає інше рівняння;

- знайти значення параметра, коли одне рівняння є наслідком іншого; знайти значення параметра, коли рівняння рівносильні.

Проблема полягає в тому, що немає одного алгоритму розв'язання цих рівнянь з параметрами. Є два основні методи розв'язання рівнянь з параметром: графічний та аналітичний [2; 8]

Загальні рекомендації щодо розв'язання типових завдань із параметром

Спочатку нам потрібно віднести рівняння до одного із розділів алгебри. Для цього нам потрібно знати визначення наступних рівнянь: лінійне, квадратичне, ірраціональне, показникове, логарифмічне та тригонометричне рівняння.

Наступний етап це встановлення виду рівняння, тобто це рівняння, нерівність чи система. Щоб визначити вид рівняння, записуємо його у

стандартному вигляді та порівнюємо знайдену форму з означенням цього виду рівняння.

Обираємо вид розв'язання та складаємо алгоритм розв'язання.

Наприклад, у нас є рівняння виду $\log_2 x + \log_a x + \log_4 x = 1$ з параметром a , яке нам потрібно розв'язати.

Ми маємо логарифмічне рівняння зі змінною x та параметром a .

Знаходимо область визначення рівняння: $x > 0, a > 0, a \neq 1$.

Це не найпростіше логарифмічне рівняння. Потрібно привести логарифми до однієї основи. Візьмемо основу 2, за основу обирати параметр недоцільно. Перейдемо до іншої основи: $\log_2 x + \frac{\log_n x}{\log_2 a} + \frac{1}{2} \log_2 x = 1$ (*). Три доданки у лівій частині рівняння (*) мають спільний множник, його потрібно винести за дужки: $\left(1 + \frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{2}\right) \log_2 x = 1$, тобто $\frac{3\log_2 a + 2}{2\log_2 a} * \log_2 x = 1$ (**). Помічаємо, що отримане рівняння (**) можна привести до найпростішого логарифмічного рівняння $\log_A X = B$ (де $A > 0, A \neq 1$). Це складно зробити із-за числового коефіцієнта $\frac{3\log_2 a + 2}{2\log_2 a}$.

Нехай $\frac{3\log_2 a + 2}{2\log_2 a} \neq 0$, звідки $\log_2 a \neq -\frac{2}{3}$, $a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$. Тоді ми маємо найпростіше логарифмічне рівняння $\log_2 x = \frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}$. Права частина рівняння містить числовий вираз, це означає, що в результаті буде деяке число. Розв'язок рівняння $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}}$. Корінь рівняння $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}} > 0$. Це задовольняє область значень.

Нехай $\frac{3\log_2 a + 2}{2\log_2 a} = 0$, звідки $a = 2^{-\frac{2}{3}}$. Тоді рівняння (**) буде мати вигляд $0 * \log_2 x = 1, 0 \neq 1$, отже $x \in \emptyset$.

Відповідь: якщо $a > 0, a = 1$, то задача не визначена; якщо $a = 2^{-\frac{2}{3}}$, то $x \in \emptyset$; якщо $a > 0, a = 1, a \neq 2^{-\frac{2}{3}}$, то $x = 2^{\frac{2\log_2 a}{3\log_2 a + 2}}$.

Під час розв'язання завдань з параметрами, треба встановити область визначення. Область визначення – це допустимі значення змінної і допустимі

значення параметра. Зазвичай це формулювання та розв'язання системи нерівностей. Нехай, ми маємо вираз під коренем парного степеня невід'ємний, вираз під логарифмом додатній; вираз в основі логарифма – додатній і не дорівнює одиниці, вираз під знаком арксинуса або арккосинуса лежить у межах $[-1; 1]$ та ін. Від параметрів можуть залежати розв'язування нерівностей. Тому узгодження окремих розв'язків для знаходження загального розв'язку системи потребує дослідження взаємного розташування на числовій осі границь областей кожної з нерівностей залежить від параметрів. Потім ми можемо встановлювати область визначення змінної для кожного значення параметрів.

Наприклад, треба знайти область визначення рівняння

$$\log_{\sqrt{2-x}}(4x + k) \text{ з параметром } k.$$

1. Вираз під квадратним коренем має бути невід'ємним ($2-x \geq 0$), але в основі логарифма треба, щоб був додатній ($\sqrt{2-x} > 0$) та не повинен дорівнювати 1 ($\sqrt{2-x} \neq 1$), вираз під логарифмом – додатній ($4x + k > 0$). Отже, маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} x < 2 \\ x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty), \\ x > -\frac{k}{4} \end{cases}, (*) \text{. Нерівність системи } (*) \text{ залежить від}$$

параметра. Тому, щоб знайти розв'язки нерівності, треба дослідити взаємне розташування чисел $2; 1, -\frac{k}{4}$. Очевидно $1 < 2$, число $-\frac{k}{4}$ залежить від значень параметра k , може бути і менше 1 і може бути більше 2, може бути між 1 та 2, або дорівнювати 1, або дорівнювати 2.

2. Маємо відповідні випадки.

2.1. Нехай $-\frac{k}{4} < 1$, звідки $k > -4$. Тоді розташування чисел буде таким, як на рис. 1.1. Отже $x \in \left(-\frac{k}{4}; 1\right) \cup (1; 2)$.

2.2. Нехай $-\frac{k}{4} = 1$, звідки $k = -4$. Тоді система (*) буде мати

$$\text{вигляд} \begin{cases} x < 2 \\ x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty) \\ x > -\frac{k}{4} \end{cases}.$$

2.3. Нехай $1 < -\frac{k}{4} < 2$, звідки $-8 < k < -4$. Тоді розташування чисел буде таким, як рис. 1.2. Отже, $x \in \left(-\frac{k}{4}; 2\right)$.

2.4. Нехай $-\frac{k}{4} = 2$, звідки $k = -8$. Тоді система (*) буде мати

$$\text{вигляд} \begin{cases} x < 2 \\ x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty) \\ x > -\frac{k}{4} \end{cases}, \text{ звідки } x \in \emptyset.$$

2.5. Нехай $-\frac{k}{4} > 2$, звідки $k < -8$. Тоді розташування чисел буде таким, як на рисунку. Отже, $x \in \emptyset$.

Область визначення рівняння $\log_{\sqrt{2-x}}(4x+k) = 4$ для $k \in (-\infty; -8]$ буде порожньою множиною; для $k \in (-8; -4]$ областю визначення буде $x \in \left(-\frac{k}{4}; 2\right)$; для $k \in (-4; +\infty]$ областю визначення буде $x \in \left(-\frac{k}{4}; 1\right) \cup (1; 2)$.



Рис. Ілюстрація до пункту 2.2

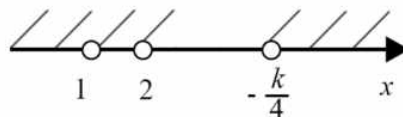


Рис. Ілюстрація до пункту 2.3

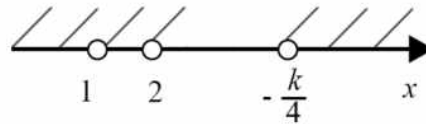


Рис. Ілюстрація до пункту 2.5

Отже, наведемо загальні методичні рекомендації щодо розв'язування рівнянь та нерівностей, що містять параметри, які і є основою для навчання учнів розв'язувати завдання ЗНО бланку Б за змістовою лінією «Рівняння та нерівності»

1. Встановлення області визначення рівняння дуже важлива та потрібна, так як буває таке, що при певних значеннях параметрів область визначення не містить ні одного значення, а значить не має розв'язків. Наприклад у рівнянні, для якого було знайдено область визначення, це $k \in (-\infty; -8]$. Знаходження області визначення іноді дає не виконувати непотрібні обчислення.

2. Потрібно здійснювати рівносильні перетворення при розв'язанні рівнянь із параметрами. Інколи треба виконати нерівносильні перетворення, тому що вони розширюють область допустимих значень. Це в свою чергу може привести до появи сторонніх коренів. Наприклад, це може трапитися при розв'язанні ірраціональних рівнянь, коли потрібно обидві частини рівняння піднести до квадрату. Для того, щоб розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x^2 - 1} = a - x$, можна піднести обидві його частини до квадрату. Для забезпечення рівносильності переходу, рівняння можна замінити на рівносильну систему виду:

$$\begin{cases} a - x \geq 0, \\ x^2 - 1 = (a - x)^2. \end{cases}$$

3. У рівняннях та нерівностях з параметрами прийнято позначати параметри наступним чином: a , b , c тощо; змінні – останніми літерами

латинського алфавіту: x , y , z тощо; коефіцієнти рівнянь, нерівностей – початковим літерам: A , B , C тощо.

Пряма параметра – це пряма, на якій позначені знайдені розв'язки залежно від значень параметра. Важливо на цій прямій позначати знайдені розв'язки, щоб не втратити їх.

Відповідь у завданнях із параметром, де ставиться вимога «розв'язати для всіх значень параметрів», складається з кількох пунктів. Допускається кожен пункт писати складнопідрядним реченням типу: «якщо ..., то...». Для тих значень параметрів, які не входять до області визначення рівняння, записують, що «задача не визначена» або «задача не має змісту». У завданнях із параметром, де ставиться вимога «знайти значення параметра, при яких виконується певна умова чи умови, у відповідь записують тільки знайдені значення параметра.

Також у додатку Д пропонуємо урок узагальнення та систематизації знань учнів (2 год) та урок контролю та оцінювання знань учнів (1 год) з теми «Розв'язування рівнянь» в 11-му класі.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційному дослідженні реалізовано виконання таких завдань: охарактеризовано нормативно-правове регулювання освітнього процесу під час організації та проведення ЗНО з математики; проаналізовано основні форми організації діяльності ЗЗСО з підготовки учнів до складання ЗНО та діяльність вчителя математики в системі роботи ЗЗСО; розкрито психолого-педагогічні особливості сучасних учнів старшої школи, що проявляються під час підготовки до ЗНО з математики; розглянуто методичні особливості підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики, що стосуються змістової лінії «Рівняння та нерівності», зокрема: навчальні програми та основний зміст навчального матеріалу з теми; специфіку підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики бланків А та Б; представлено розробки уроків узагальнення та систематизації знань учнів з теми «Рівняння та нерівності» у системі підготовки учнів до розв'язування завдань ЗНО з математики.

У ході дослідження встановлено актуальність проблеми підготовки учнів до ЗНО з математики. З урахуванням цього були зроблені висновки, що якісна підготовка до ЗНО з математики вимагає організації регулярного повторення навчального матеріалу, добору методичних засобів та має включати такі компоненти: приклади завдань, які розв'язуються на ЗНО; системи вправ на засвоєння різних методів розв'язування рівнянь та нерівностей; різні способи аналізу умов та вимог завдання; засоби самоконтролю діяльності. Учитель повинен враховувати психологічний аспект учнів; налаштовувати їх на подолання труднощів та досягнення успіху; застосувати на уроках тестові форми завдань з використанням самооцінювання та взаємооцінювання. Отже, методичні рекомендації відіграють важливу роль стосовно якісної підготовки учнів до ЗНО з математики.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Барановська Г.Г. та ін. Практикум з математики: Показникова та логарифмічна функції: навч. посібник для вступників до вузів. Київ : Національний технічний ун-т України «Київський політехнічний ін-т», 1998. 124 с.
2. Бевз Г.П. та ін. Алгебра і початки аналізу : 11 кл. : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів : академічний рівень, профільний рівень. Київ : Освіта, 2011. 400 с.
3. Бевз Г.П. та ін. Математика : 11 кл. : підручник для загальноосвітніх навчальних закладів : рівень стандарту. Київ : Генеза, 2011. 320 с.
4. Бевз Г.П. Методи навчання математики. Харків : Основа, 2003. 96 с.
5. Бевз Г.П. Методика викладання математики. Київ : Вища школа, 1997. 376с.
6. Білицький О. Управління процесом розвитку особистості засобами варіативного компоненту змісту освіти. *Директор школи*. 2002. № 8. С. 2-3.
7. Біляк Б. Профільне навчання в загальноосвітніх навчальних закладах. *Директор школи, ліцею, гімназії*. 2003. № 4. С. 44-47.
8. Блох А.Я. Методика преподавания математики в средней школе. Москва : Просвещение, 1981. 416 с.
9. Богоявленський Д. Н. Прийоми розумової діяльності та їх формування у школярів. *Питання психології*. 1969. №2.
10. Бугайов О.І. Диференціація навчання учнів у загальноосвітній школі. Київ : Освіта, 1992. 63 с.
11. Вивальнюк Л.М. Математика. Київ : Освіта, 1998. 301 с.
12. Виленкин Н.Я. Функции в природе и технике. Москва : Просвещениу, 1978. – 231 с.
13. Вікова та педагогічна психологія / О.В. Скрипченко, Л.В. Волинська, З.В. Огороднійчук та ін. Київ : Просвіта, 2001. 416 с.

- 14.Возрастная и педагогическая психология / Под. ред. А.В. Петровского. Москва : Наука, 1999. 346 с.
- 15.Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 321 с.
- 16.Гібш І.А. Розвиток мовлення в процесі вивчення шкільного курсу математики. Математика в школі. 1995. №6.
- 17.Горох В.П. та ін.. Математика. Комплексна підготовка: Універсальне видання для успішної підготовки до ЗНО / В.П. Горох, Ю.П.Бабич, Г.М.Вартанян та ін. Х.:Факт, 2008.
- 18.Гузєєв В.В. Технологія проблемного семінару: синтез «мозкового штурму» і «творчої дискусії». *Шкільні технології*. №1. 1998.
- 19.Гурський І.П. Функції та побудова графіків. Посібник для вчителів. Москва : Просвещение, 1968. 215 с.
- 20.Гусєв В. А. та ін Позакласна робота з математики. Київ: Просвітництво. 1977.
- 21.Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти URL : <http://www.mon.gov.ua/ua/often-requested/state-standards/>.
- 22.Дунець Л. Формування професійних інтересів у майбутніх фахівців. *Рідна школа*. 2001. Січень. С. 48-49.
- 23.Єфремова О.І. Міжпредметні зв'язки фізики і математики у 9-11 класах середньої загальноосвітньої школи : автореф. дис. ... канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)». Київ : НПУ, 2001. – 20 с.
- 24.Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Винниченко. Київ : РННЦ «ДІНІТ», 2003. 324 с.
- 25.Жалдак М.І. Комп'ютерно-орієнтовані засоби навчання математики, фізики, інформатики / М. І. Жалдак, В. В. Лапінський, М. І. Шут. Київ : Дініт, 2004. 110 с.
- 26.Заброцький М.М. Педагогічна психологія. Київ : МАУП, 2000. 100 с.

27. Заслонкіна Л.С. Мотивація пізнавальної діяльності на уроках математики. *Математика в школах України*. 2012. № 31. С. 5-11.
28. Засоби навчання математики. URL:
http://wiki.fizmat.tnpu.edu.ua/index.php/Засіб_навчання
29. Захарійченко Ю. та ін.. Математика. Збірник текстових завдань для підготовки до ЗНО / Ю.О.Захарійченко, О.В.Школьний. К.: Генеза, 2008.
30. Захарова А.В. Психология обучения старшеклассников. Москва : Знание, 1976. 64 с.
31. Зенкевич І. Г. Естетика уроку математики. М.: Просвітництво, 1981.
32. Зіненко І.М. Упровадження компетентнісного підходу до навчання алгебри та початків аналізу учнів гуманітарного ліцею : результати педагогічного експерименту. *Дидактика математики: проблеми і дослідження : Міжнародний збірник наукових робіт*. 2010. № 34. С. 98-101.
33. Иванов О. А. Системы компьютерной алгебры на уроках математики в школе. *Математика в школе*. 2012. № 3. С. 39-43.
34. Іванко Т.І. Систематизація методів розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей. *Математика в школах України*. 2007. Березень (№ 7). С. 16-21.
35. Ігнатенко М.Я. Методологічні та методичні основи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів старших класів при вивченні математики : дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02. Київ, 1997. 335 с.
36. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики / В.В. Корольський, Т.Г. Крамаренко, С.О. Семеріков, С.В. Шокалюк : [під ред. акад. М. І. Жалдака]. Кривий Ріг : Книжкове видавництво Киреєвського, 2009. 316 с.
37. Інтерактивні технології на уроках математики / Уклад. І.С. Маркова. Харків : Основа, 2008. 126 с.
38. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики. Харків : Основа, 2006. 140 с.

- 39.Кларин М.В. Интерактивное обучение – инструмент освоения нового опыта. Педагогика. 2000. № 7. С. 12-18.
- 40.Класифікація методів навчання URL: http://ualib.com.ua/br_4310.html
- 41.Козира В.М. Технологія уроку з математики. Таллінн : Астон, 2002. 52 с.
- 42.Колягін Ю.М., Ткачова М.И., Федорова Н. Профільна диференціація навчання математики. *Математика в школі*. 1990. №4.
- 43.Кон И.С. Психология юношеского возраста. Москва : Просвещение, 1999. 109 с.
- 44.Коток І.Б. Творчі вправи на уроках математики. *Математика в школах України*. 2012. № 32. С. 13.
- 45.Крайзман М. Л. Шляхи активізації розумової діяльності учнів при викладанні математики. Київ : Радянська школа, 1964. 96 с.
- 46.Крутецкий В. А. Психология обучения и воспитания школьника. Москва : Просвещение, 1976. 303 с.
- 47.Кушнір І. Алгебра: від опанування до захоплення. Київ : Освіта, 2002. 448 с.
- 48.Кушнір І. У світі логарифмів. Київ : Факт, 2004. 136 с.
- 49.Л.О. Денищева, Ю. А. Глазков, К. А. Краснянська та ін. Методика підготовки: книга для вчителя. М.: Просвіта-2005.
- 50.Логарифмічні рівняння. *Математика*. 2004. Квітень (№ 14). С. 7-10.
- 51.Логарифмічні та показникові нерівності. *Математика в школі*. 2004. № 1. С. 20-22.
- 52.Македонська С.І. Побудова графіків логарифмічних функцій. *Математика*. 2003. Березень (№12). С. 8-11.
- 53.Манвелов С. Г. Завдання на розвиток самоконтролю учнів. М.: Просвітництво. 1997.
- 54.Математика : 11 клас : [підручник для загальноосвітніх навчальних закладів] : рівень стандарту / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2011. 480 с.

55. Математика. Індивідуальний комплект для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. Київ : Освіта, 2012. 258 с.
56. Математика. Навчальні програми для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів URL : <www.mon.gov.ua>.
57. Мерзляк А.Г. Алгебра та початки аналізу : 11 клас : академічний рівень, профільний рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. Харків : Гімназія, 2011. 432 с.
58. Методика викладання математики в середній школі. Загальна методика / Упоряд. Р. С. Черкасов, А.А. Столяр. М.: Просвітництво. 1985.
59. Минаева С.С. Современные информационные технологии в обучении математики. *Математика в школе*. 2012. № 6. С. 17-25.
60. Мірецька Л.Б. Семінар з алгебри на тему : «Показникова і логарифмічна функції в природі, науці, техніці, мистецтві» : (10–11 клас). *Математика в школі*. 2005. № 10. С. 32-36.
61. Нелін Є. та ін. Зовнішнє оцінювання з математики. Інформаційні матеріали/Є. Нелін, Л. Дворецька, Н. Прокопенко та ін. К.: УЦОЯО, 2006.
62. Нелін Є.П. Алгебра в таблицях. Навчальний посібник для учнів 7-11 класів. Харків : Гімназія, 2011. 144 с.
63. Нелін Є.П. Алгебра та початки аналізу : 11 клас : академічний рівень, профільний рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. Харків : Гімназія, 2011. 432 с.
64. Нелін Є.П. Математика. Комплексна підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання / Є.П. Нелін, О.М. Роганін. Харків : Гімназія, 2011. 248 с.
65. Остапчук У. Застосування сучасних освітніх технологій. *Математика в школі*. 2004. № 8. С. 11-17.
66. Пасячник Н. Формування соціальної компетентності випускника школи на уроках математики. *Математика в сучасній школі*. 2012. № 7/8. С. 36-38.

- 67.Перова М.П. Дидактические игры и упражнения по математике. Москва : Просвещение. 2009. 163 с.
- 68.Повзло Н.М. Розв'язування логарифмічних нерівностей. *Математика в школах України*. 2006. Квітень (№ 11). С. 7-17.
- 69.Пометун О.І. Інтерактивні технології навчання: теорія, практика, досвід. Київ : Освіта, 2002. 128 с.
- 70.Рижик В. І. 30000 уроків математики. М.: Просвітництво. 2010.
- 71.Саранцев Г.И. Формирование математических понятий в средней школе. *Математика в школе*. 1998. № 6. С. 1-27.
- 72.Сердюк З.О. Формування прийомів розумової діяльності учнів у процесі вивчення математики в школах і класах суспільно-гуманітарного напрямку : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02. Черкаси, 2011. 245 с.
- 73.Симонов А.Я. Система тренировочных задач и упражнений по математике / А.Я. Симонов, Д.С. Бакаев, А.Г. Эпельман / Москва : Просвещение, 1991. 208 с.
- 74.Сікорський П.І. Психолого-педагогічні проблеми навчання математики. *Математика в школі*. 2004. №2. С. 5-8.
- 75.Сікорський П.І. Теорія і методика диференційованого навчання математики. Львів : Сполах, 2000. 421 с.
- 76.Слепкань З.І. Методика навчання математики: підручник. 2-ге вид., допов. і перероб. Київ : Вища школа, 2006. 582 с.
- 77.Смишляев В. К. Практикум з вирішення завдань шкільної математики. М.: Просвітництво. 1978.
- 78.Соколенко Л.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу : практикум / Л.О. Соколенко, Л.Г. Філон, В.О. Швець. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2010. 128 с.
- 79.Солодченко Л.І. Розвиток життєвих компетентностей на уроках математики. Тернопіль-Харків : Ранок, 2011. 144 с.
- 80.Столяр А.А. Педагогика математики. Минск : Высшая школа, 1986. 384 с.

- 81.Сторчай В. Ф. Показникові і логарифмічні рівняння: навч. посібник. Київ : Дніпропетровський держ. ун-т., 1995. 100 с.
- 82.Тализіна Н. Ф. Управління процесом засвоєння знань. М.: Педагогіка. 1975.
- 83.Урок математики в сучасних технологіях : теорія і практика. Уклад І.С. Маркова. Харків : Основа, 2007. 144 с.
- 84.Український центр оцінювання якості освіти. URL : <https://testportal.gov.ua>
- 85.Фридман Л.М. Психологический справочник учителя / Л.М. Фридман, И.Ю. Кулагина. Москва : Просвещение, 1991. – 288 с.
- 86.Цукарь А.Я. Вправи практичного характеру з математики. *Математика в школах України*. 1993. № 3. С. 8-11.
- 87.Шунда Н.М. Функції та їх графіки / Н.М. Шунда. Київ : Радянська школа, 1983. – 190 с.
- 88.Щербинин Г.П. Показательно-логарифмические выражения, уравнения и неравенства. Харьков : Харьковский гос. технический ун-т радиозлектроники, 1995. 60 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Порівняння особливостей ЗНО та традиційного іспиту

Таблиця А.1

Порівняння особливостей ЗНО та традиційного іспиту

Характеристики	Традиційний іспит (усний або письмовий)	ЗНО
Що оцінюється?	Оцінюються не просто фактичні знання, а вміння їх піднести. Рівень розвитку усного мовлення може дозволити "приховати" прогалини в знаннях	Оцінюються фактичні знання і вміння міркувати, вирішувати, а також вміння утримуватися в рамках завдання, розуміти формулювання.
Що впливає на оцінку?	Великий вплив роблять суб'єктивні фактори: контакт з екзаменатором, загальне враження тощо	Оцінка максимально об'єктивна, так як виключений особистісний фактор.
Можливість виправити власну помилку	На усному іспиті легше помітити помилку за рахунок зворотного зв'язку від екзаменатора і можна її виправити під час розповіді або при відповіді на питання екзаменатора, на письмовому – при перевірці власної роботи	Можна помітити і виправити помилки при самоперевірці
Хто оцінює?	Знайомі учневі вчителі	Комп'ютер, незнайомі і невидимі експерти
Коли можна дізнатися результати іспиту?	На усному іспиті – практично відразу, на письмовому – протягом декількох днів	Протягом декількох тижнів
Зміст іспиту.	Учень повинен продемонструвати володіння певним фрагментом навчального матеріалу (певною темою, питанням і тощо)	Іспит охоплює практично весь обсяг навчального матеріалу

Додаток Б

Завдання ЗНО з математики 2016-2021 років

ЗНО 2016

4. Укажіть число, що є розв'язком нерівності $\frac{5}{x-3} \geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
-2	0	2	4	9

6. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=5, \\ 4^x=16^y. \end{cases}$ Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок цієї системи, то $x_0 \cdot y_0 =$

А	Б	В	Г	Д
-36	-14	-6	4	6

18. Розв'яжіть нерівність $\log_3 x < -1$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; \frac{1}{3})$	$(-\infty; \frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}; 0)$	$(-\infty; -3)$	$(\frac{1}{3}; +\infty)$

20. Розв'яжіть рівняння $3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

28. У готелі для проживання туристів є одномісні, двомісні та тримісні номери. Їх всього 124. Якщо всі номери в готелі заповнені, то одночасно в ньому проживає 270 туристів. Скільки всього в цьому готелі тримісних номерів, якщо кількість одномісних номерів дорівнює кількості двомісних номерів?

33. Розв'яжіть рівняння $\frac{\sqrt{x^2 + (4a-4)x + 4a^2} - 2\sqrt{2a}}{5 \cdot 5^{2x} - 5^{a+x} - 5^{a-1} + 5^x} = 0$ залежно від значень параметра a .

ЗНО 2017

3. Розв'яжіть рівняння
- $2^{2x} = \frac{1}{2^3}$
- .

А	Б	В	Г	Д
-3	-2	-1,5	1,5	2

9. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння
- $\sqrt{6-4x} = 4$
- .

А	Б	В	Г	Д
$[-3; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 3)$	$[3; 6)$

17. Розв'яжіть нерівність
- $(x^2 + 64)(x - 5) > 0$
- .

А	Б	В	Г	Д
$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; 8)$	$(-\infty; 5) \cup (8; +\infty)$	$(-\infty; 5)$

28. Автобус вирушив з міста А до міста В, відстань між якими становить 150 км. Через 30 хв із міста А до міста В тією самою дорогою вирушив автомобіль, швидкість якого в $1\frac{1}{5}$ разів більша за швидкість автобуса. Скільки часу (у год) витратив на дорогу з міста А до міста В автомобіль, якщо він прибув до міста В одночасно з автобусом? Уважайте, що автобус та автомобіль рухалися зі сталими швидкостями.

33. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x-y| = |x-a|, \\ \lg(y-a) = \lg(4a^2 + x - x^2) \end{cases}$ залежно від значень параметра a .

ЗНО 2018

5. Яке з наведених чисел є коренем рівняння
- $\log_4(x-1) = 3$
- ?

А	Б	В	Г	Д
4	13	63	65	82

7. Розв'яжіть рівняння
- $4\sqrt{x} = 1$
- .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	16	$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$

14. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} xy = -12, \\ x(2y - 1) = -18. \end{cases}$ Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи, то $x_0 =$

А	Б	В	Г	Д
-6	-16	-9	2	6

18. Розв'яжіть нерівність $2^x + 2^{x+3} \geq 144$.

А	Б	В	Г	Д
$[34,5; +\infty)$	$[4; +\infty)$	$(-\infty; 4]$	$(-\infty; 4,5]$	$[4,5; +\infty)$

28. У майстерні мали виготовити 240 стільців за n днів, причому щодня планували виробляти однакову кількість стільців. Однак, на прохання замовника, завдання виконали на 2 дні раніше запланованого терміну. Для цього довелося денну норму виготовлення збільшити на 4 стільці. Визначте n .

33. Розв'яжіть нерівність $\frac{\log_a x}{x^2 + (a-4)x + 4 - 2a} \leq 0$ залежно від значень параметра a .

ЗНО 2019

3. Розв'яжіть рівняння $(x+1)(2x-3)=0$.

А	Б	В	Г	Д
$-3; 1$	$-1,5; 1$	$-1; \frac{2}{3}$	$-1; 3$	$-1; 1,5$

8. Яке з наведених чисел є розв'язком нерівності $|x| > 3$?

А	Б	В	Г	Д
3	1	0	-3	-8

16. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2y = 5x, \\ x + y = 14. \end{cases}$ Для одержаного розв'язку $(x_0; y_0)$ укажіть добуток $x_0 \cdot y_0$.

А	Б	В	Г	Д
5	10	20	40	48

20. Якому з наведених проміжків належить корінь рівняння $2^{x+3} - 3 \cdot 2^x = 10\sqrt{2}$?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$[0; 0,5)$	$[0,5; 1)$	$[1; 2)$	$[2; +\infty)$

28. Маршрутний автобус, рухаючись зі сталою швидкістю, подолав відстань від міста А до міста В за 5 год, а на зворотний шлях витратив на 30 хв менше. Визначте швидкість (у км/год) автобуса на маршруті від А до В, якщо вона на 8 км/год менша за швидкість на маршруті від В до А. Уважайте, що довжини маршрутів від А до В та від В до А, якими рухався маршрутний автобус, рівні.

33. Задано систему нерівностей $\begin{cases} \frac{x+1}{x-2} \geq 0, \\ \frac{1}{2}(2\sin^2(\pi a) + \cos(2\pi a) + x) > a, \end{cases}$ де x – змінна, a – стала.

- Розв'яжіть першу нерівність цієї системи.
- Визначте множину розв'язків другої нерівності системи залежно від значень a .
- Визначте всі розв'язки системи залежно від значень a .

ЗНО 2020

4. Яке з наведених чисел є коренем рівняння $\frac{5x+8}{3} = 1$?

А	Б	В	Г	Д
1	0	3	-2	-1

7. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$-4; 3$	$1; 3$	$3; -1$	$-2; 3$	$-1; 4$

15. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} 6 > 2x, \\ 7x - 28 \leq 0. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(3; 4]$	$(-\infty; -3)$	$(-3; 4]$	$(-\infty; 4]$

28. Човен проплив 18 км проти течії річки, витративши вдвічі менше часу, ніж на подолання 48 км за течією. Власна швидкість човна є сталою. Визначте власну швидкість човна (у км/год), якщо швидкість течії дорівнює 2,5 км/год.

35. Задано рівняння $(5^{2x+1} - 25^x - 20)(\sqrt{ax-6} - \sqrt{a-2x}) = 0$, де x – змінна, a – стала.

1. Розв'яжіть рівняння $5^{2x+1} - 25^x - 20 = 0$.
2. Розв'яжіть задане рівняння залежно від значень a .

ЗНО 2021

4. Укажіть корінь рівняння $1 - 5x = 0$.

А	Б	В	Г
5	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	4

10. Укажіть проміжок, якому належить корінь рівняння $\sqrt{x+12} = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-12; -6)$	$[-6; 0)$	$[0; 6)$	$[6; 12)$	$[12; +\infty)$

13. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,9}(3x) > 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0,27)$	$(-\infty; 0,6)$	$(0,27; +\infty)$	$(0,6; +\infty)$	$(0; 0,27)$

26. Для приготування дезінфікуючого розчину концентрат розводять водою в масовому відношенні 2 : 7 відповідно, після чого на кожні 10 г води додають 1 г ароматичної речовини. Скільки грамів концентрату потрібно для приготування 485 г розчину?

28. Розв'яжіть рівняння $x^4 - x^2 - 20 = 0$. У відповіді запишіть добуток усіх його дійсних коренів.

34. Задано систему рівнянь $\begin{cases} ax^2 + 3ax + 4^{1+\sqrt{y}} = 8, \\ x + 2 \cdot 4^{\sqrt{y}} = 1, \end{cases}$ де x, y – змінні, a – довільна стала.

1. Розв'яжіть систему, якщо $a = 0$.
2. Визначте всі розв'язки заданої системи залежно від значень a .

Додаток В

Фрагмент бесіди з теми «Лінійні рівняння»

Вчитель також має домогтися розуміння учнями таких тверджень: запис $x \geq y$ означає, що або $x > y$, або $x = y$; замість двох нерівностей $x < a$, $a < y$ можна записати подвійну нерівність $x < a < y$.

Важливим етапом є вивчення основних властивостей числових нерівностей та розв'язування вправ на їх застосування.

На етапі формування первинних умінь і навичок учнів вчитель може запропонувати такі вправи:

1. Серед наведених нерівностей вкажіть правильні:

1) $0 \geq 2$; 2) $3 \geq 3$; 3) $25 \geq 20$; 4) $7 \geq 8$.

2. Знайдіть найменше і найбільше ціле число, що задовольняє нерівність:

1) $x \geq -4$; 2) $x \geq 3,5$; 3) $x > 5$;

4) $x \leq 3$; 5) $\frac{x}{3} \leq -2$; 6) $\frac{2}{3} \geq \frac{x}{15}$.

3. Додайте нерівності:

1) $2 < 5$ і $-7 < -3$;

2) $-2 > -4$ і $3 > -2$;

3) $3a^2 < x + 1$ і $2a - a^2 < x^2 - 1$.

4. Виконайте множення нерівностей ($a, x, y > 0$):

1) $2 < x$ і $3 < y$;

2) $a + 1 > a$ і $a > 5$;

3) $2 < 3^2$ і $3^2 \cdot 2^2 < 5$.

5. Нехай $a < b$. Порівняйте числа:

1) $a + x$ і $b + x$; 2) $a - 5$ і $b - 5$;

3) $a - a^2$ і $b - b^2$; 4) $a + x^2$ і $b + x^2$.

Додаток Г

Вивчення теми «Квадратні нерівності»

Опорний конспект з теми «Квадратні нерівності»

Квадратні нерівності
Квадратними нерівностями називаються нерівності вигляду $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$, де $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Приклад. $3x^2 - 2x - 1 > 0$, $x^2 - 9 \geq 0$, $x^2 - 2x < 0$, $-x^2 > 0$ – квадратні нерівності (з різними значеннями коефіцієнтів квадратного тричлена в лівій частині).

Вивчення квадратних нерівностей слідує за вивченням квадратного рівняння, тож учні вже вміють будувати графіки квадратичної функції та на них відмічати нулі функції, якщо вони існують. Тому перехід до розгляду квадратних нерівностей можна здійснити, перейшовши до побудови та вивчення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$. Оскільки можливі різні випадки розташування графіка відносно осі абсцис, краще почати з розгляду конкретного прикладу, у якому цей квадратний тричлен має різні корені.

Приклад 1.4. Розв'язати нерівність $x^2 + 7x - 8 < 0$.

Розв'язання

Розглянемо функцію лівої частини нерівності (квадратного тричлена). Графіком даної функції є парабола. Згідно зі знаком нерівності постає питання, де ця парабола знаходиться нижче нуля або нижче осі абсцис. Щоб відповісти на це питання, треба визначити де вона перетинає вісь Ox . Учні згадують, що це можна зробити, прирівнявши функцію до нуля і розв'язавши отримане рівняння. Отже, щоб розв'язати задану нерівність, треба прирівняти її ліву частину до нуля і розв'язати рівняння: $x^2 + 7x - 8 = 0$.

Учні помічають, що це звичайне квадратне рівняння і розв'язати його можна за теоремою Вієта або за допомогою дискримінанта. Отже, корені даного рівняння: $x_1 = -8$, $x_2 = 1$. Далі, виконуючи ескіз параболи, учні з'ясовують, що вітки параболи направлені вгору і парабола перетинає вісь Ox в точках $x_1 = -8$ і $x_2 = 1$ (рис. 2.7).



Рис. 2.7.

Далі повертаємось до заданої нерівності. Знак нерівності свідчить про те, що необхідно з'ясувати на якому з трьох утворених проміжків на координатній прямій парабола знаходиться нижче вісі Ox (< 0). З рисунка очевидно, що це проміжок $(-8; 1)$.

Відповідь: $(-8; 1)$.

Доречно запропонувати учням розв'язати декілька квадратних нерівностей, щоб побачити різницю в розв'язках в залежності від знака квадратної нерівності. У процесі подальшого вивчення встановлюється також, що немає потреби в точно накресленому графіку квадратного тричлена, досить намітити тільки положення коренів, якщо вони є, і врахувати на ескізі потрібні особливості графіка (напрямок віток параболи).

Приклад 1.6. Розв'язати нерівність $2x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

Розв'язання

Розв'яжемо відповідне квадратне рівняння $2x^2 - 3x + 2 = 0$ за допомогою дискримінанта: $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 - 16 < 0$. На цьому етапі багато хто з учнів записали б у відповідь, що нерівність коренів не має. Але слід наголосити учням, що ставилось завдання розв'язати нерівність, а не рівняння і якщо відповідне квадратне рівняння не має коренів, це не означає, що параболи не існує – вона не перетинає вісь абсцис. Тому схематично це виглядає так (рис. 2.9):

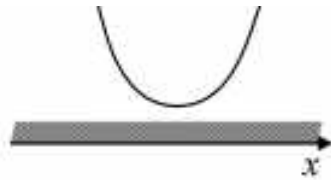


Рис. 2.9.

Далі, згідно з умовою задачі, треба визначити, на якому проміжку парабола знаходиться вище осі абсцис. Учень має побачити, що це проміжок $(-\infty; +\infty)$, тобто вся множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Відповідь: $\mathbb{R}$.

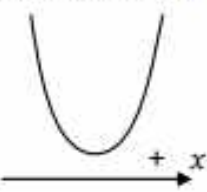
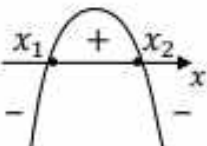
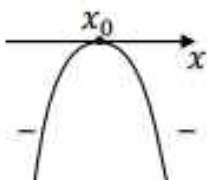
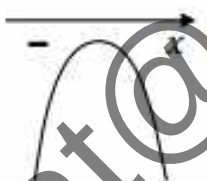
Також обов'язково треба розглянути з учнями випадок, коли парабола перетинається з віссю абсцис лише в одній точці.

Після розгляду конкретних прикладів вчитель може запропонувати учням схему, в якій наведені різні випадки розташування графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі Ox залежно від знака старшого коефіцієнта та знака дискримінанта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ (табл.2.3). У результаті певного тренування учні звикають користуватися такою схемою, а потім її образом.

Табл.2.3

Випадки розташування графіка квадратичної функції відносно осі Ox та розв'язки відповідних квадратних нерівностей

Схема	Квадратна нерівність			
	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$	$f(x) \geq 0$	$f(x) \leq 0$
$a > 0, D > 0$ 	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$
$a > 0, D = 0$ 	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	x_0

$a > 0, D < 0$ 	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$
$a < 0, D > 0$ 	$(x_1; x_2)$	$(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$	$[x_1; x_2]$	$(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$
$a < 0, D = 0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; x_0) \cup (x_0; +\infty)$	x_0	$(-\infty; +\infty)$
$a < 0, D < 0$ 	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$	$\emptyset$	$(-\infty; +\infty)$

Отже, варіантів розташування параболи багато, але слід наголосити учням на тому, що в подальшому на практиці не обов'язково пам'ятати усі ці варіанти. Треба лише зрозуміти, що саме вимагається, коли ставиться завдання розв'язати нерівність: з'ясувати, на яких проміжках парабола знаходиться над чи під віссю Ox . Перевірити розуміння учнями залежності розташування графіка квадратичної функції відносно осі Ox від знаків старшого коефіцієнта та дискримінанта відповідного квадратного тричлена вчитель може за допомогою вправи на знаходження пари у LearningApps (рис. 2.11).

Завдання передбачає з'єднання відповідних зображень та їх описів перетягуванням за допомогою лівої кнопки миші. При потребі учень може роз'єднати вибрані фрагменти, клацнувши мишою на межі з'єднання.

Завдання 1.4. Встановіть залежність розташування графіка функції $ax^2 + bx + c$ від коефіцієнтів a , c і дискримінанта D і з'єднайте зображення параболі з відповідним описом.



Рис. 2.11. Вправа на знаходження пари в LearningApps

Додаток Д

Розробки уроків

Урок 1

Мета: узагальнити й систематизувати методи та способи розв'язування рівнянь різних типів; вдосконалити вміння та навички учнів розв'язувати рівняння; розвивати методи й прийоми розумової діяльності, навички самоконтролю та самооцінювання; виховувати емоційну врівноваженість, вольові риси характеру, наполегливість, старанність у навчанні.

Хід уроку

I. Актуалізація опорних знань і вмінь учнів.

Запитання

1. Що називається коренем рівняння?

Чи є число 1 коренем рівняння

$$x - 2 = \sqrt{2 - x} ?$$

2. Що називається областю визначення рівняння? Чи тотожні поняття «область визначення рівняння» та «область допустимих значень рівняння»?

3. Які рівняння називаються рівносильними?

Чи рівносильні рівняння

$$\frac{x^2 - 16}{x + 4} = 0 \quad \text{і} \quad x^2 - 16 = 0 ?$$

Чому?

4. Які перетворення рівнянь є рівносильними?

Чи рівносильними є перетворення

$$\sqrt{x^2 + 2} = 2 \quad \leftrightarrow \quad x^2 + 1 = 4 ?$$

5. Що таке рівняння-наслідок?

Яке рівняння буде наслідком рівняння

$$x - 2 = \sqrt{2 - x} ?$$

II. Розв'язування рівнянь.

Учитель нагадує учням, що процес розв'язування рівнянь полягає в тому, щоб дане рівняння за допомогою перетворень звести до простішого,

методи розв'язування якого відомі. Так, розв'язуючи тригонометричні, показникові, логарифмічні рівняння, слід за допомогою певних методів (уведення нової змінної, потенціювання, логарифмування) звести такі рівняння до раціонального. Тому вміти розв'язувати раціональні рівняння важливо, бо до них зводяться всі інші рівняння. При цьому вчитель опирається на схеми з узагальнення теоретичних відомостей до кожного типу рівнянь.

1. Раціональні рівняння.

Учитель. Дано рівняння

$$(x-2)(x^2-6x-7)=0$$

Як його розв'язати?

Учень. Це рівняння – раціональне. Оскільки добуток дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю, то слід прирівняти до нуля кожен множник і розв'язати два рівняння:

$$x-2=0 \text{ і } x^2-6x-7=0$$

Учитель. Так, розкладання на множники – це один із методів розв'язування раціональних рівнянь.

А як розв'язати раціональне рівняння

$$x - x^2 - \frac{6}{x - x^2} = 5,$$

в якому вираз $x - x^2$ зустрічається двічі?

Учень. Можна ввести нову змінну

$$t = x - x^2.$$

Учитель. Введення нової змінної – ще один із методів розв'язування раціональних рівнянь. Це рівняння ціле раціональне чи дробово-раціональне?

Учень. Дробово-раціональне, оскільки в знаменнику міститься вираз із змінною.

Учитель. А з чого б ви розпочали розв'язувати таке рівняння?

Учень. Зі знаходження ОДЗ: $x - x^2 \neq 0$, $t \neq 0$.

Учитель. Правильно, це перший етап, другий – безпосереднє розв'язування рівняння, а третій?

Учень. Із знайдених значень змінної виключити ті, що не входять до ОДЗ.

Учитель. Серед рівнянь знайдіть дробово-раціональні та розв'яжіть їх (усно):

$$1) \frac{8}{2-x} = 1;$$

$$2) 4(x + 0,4) = 0;$$

$$3) \frac{1}{5}x = 1$$

$$4) \frac{1}{x^2} = 1$$

2. Рівняння, що містять змінну під знаком модуля.

Учитель. Як розв'язати рівняння

$$|x| - 2x^2 = 0?$$

Учень. Треба розкрити знак модуля.

Учитель. Правильно. Пригадаємо означення модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Для розв'язання цього рівняння необхідно розглянути два випадки:

1) якщо $x \geq 0$, то рівняння має вигляд

$$x - 2x^2 = 0$$

2) якщо $x < 0$, то рівняння має вигляд

$$-x - 2x^2 = 0$$

Учитель. Як розв'язати рівняння

$$x - 2x^2 = 0?$$

Учень. Способом винесення спільного множника за дужки.

Учитель. Розв'язування цього рівняння закінчить вдома.

Далі розглянемо рівняння

$$|2x - 3| = 5$$

Пам'ятаємо, що

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

Матимемо сукупність:

$$\left(\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 \geq 0, \\ 2x - 3 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ 3 - 2x = 5 \end{cases} \end{array} \right.$$

Однак можна піднести обидві частини рівняння до квадрата, але потім зробити перевірку.

3. Ірраціональні рівняння.

Учитель. Які рівняння називають ірраціональними? Які ви знаєте способи розв'язування ірраціональних рівнянь?

Учень. Піднесення обох частин рівняння до одного і того самого степеня та введення нової змінної.

Учитель. Запишіть рівняння у два стовпчики: у перший – ті, які розв'язуються способом піднесення обох частин рівняння до степеня, у другий – ті, що доцільно розв'язати способом введення нової змінної.

1) $\sqrt{15-3x} = x-1$;

2) $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} = 3$;

3) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$;

4) $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$;

5) $\sqrt[3]{4x-1} - \sqrt[3]{x+1} = 1$;

6) $2\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x-1} = 3$.

Учитель. З чого потрібно починати розв'язання ірраціонального рівняння?

Учень. Зі знаходження ОДЗ.

Учитель. Взагалі кажучи, можна і не знаходити ОДЗ, однак в кінці розв'язання обов'язково слід зробити перевірку.

4. Показникові рівняння.

Учитель. Які рівняння називають показниковими? Розв'яжіть найпростіші показникові рівняння (усно) :

1) $2^{x+1} = 2;$

2) $5^{x-1} = -5;$

3) $3^x + 2 = 1;$

4) $7^x = 8.$

Які ви знаєте способи розв'язування показникових рівнянь?

Учень. Основним способом розв'язування показникових рівнянь є введення нової змінної.

Учитель. Розв'яжіть рівняння

$$9^{x+1} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0.$$

Учень. Треба звести рівняння до однієї основи усі степені зі змінною в показнику:

$$9 \cdot 3^{2x} + 26 \cdot 3^x - 3 = 0,$$

а далі виконати заміну змінної, і розв'язати квадратне рівняння.

Учитель. Логарифмування – це ще один із способів розв'язування показникових рівнянь.

5. Логарифмічні рівняння.

Учитель. Дайте означення логарифмічного рівняння. Розв'яжіть рівняння.

$$\log_2 (x+1)=5.$$

Учень. $x = 31.$

Учитель. Дайте пояснення.

Учень. Оскільки $2^5 = 32$, то $x+1 = 32, x = 32, = 31.$

Учитель. Але можна записати число 5 як $\log_2 32$, тоді матимемо:

$$\log_2 (x+1) = \log_2 32.$$

Перехід від рівняння

$$\log_a (f(x)) = \log_a (g(x)),$$

де $a > 0$, $a \neq 1$ до рівняння

$$f(x) = g(x)$$

є загальним способом розв'язування логарифмічних рівнянь.

Якщо не врахувати ОДЗ рівняння, то перехід не виявиться рівносильним, і тому потрібна обов'язкова перевірка знайдених коренів. Якщо ж врахувати ОДЗ, то такий перехід не призведе до появи сторонніх коренів.

Розглянемо рівняння

$$\log^2_3 x + \log_3 |x|^2 = 8.$$

Якою буде ОДЗ даного рівняння?

Учень. $x > 0$.

Учитель. Дане рівняння можна записати так:

$$(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 |x| - 8 = 0$$

Використовуючи властивості логарифмів, враховуючи ОДЗ, знак модуля можна опустити. Яким способом можна розв'язати це рівняння?

Учень. Способом введення нової змінної.

Учитель. Розв'язання закінчить вдома.

Учитель. Розглянемо рівняння

$$3^{2-\log_3 x} = 81x.$$

Чи можна його розв'язати тими методами, які ми проаналізували?

Оскільки логарифм міститься у показнику степеня, то слід застосувати спосіб логарифмування. Але варто переконатися, що логарифми від обох частин існують. Що є ОДЗ даного рівняння?

Учень. $x > 0$.

Учитель. За такої умови ліва та права частина є виразами, що набувають тільки додатних значень, тому їх логарифми існують. Як ви гадаєте, за якою основою краще логарифмувати?

Учень. За основою 3 (виходить до дошки і записує розв'язання).

$$\log_3 3^{2-\log_3 x} = \log_3 (81x)$$

$$(2 - \log_3 x) \log_3 3 = \log_3 81 + \log_3 x,$$

$$2 - \log_3 x = 4 + \log_3 x,$$

$$2 \log_3 x = -2,$$

$$\log_3 x = -1,$$

$x = \frac{1}{3}$ - це значення змінної задовольняє ОДЗ рівняння.

Відповідь. $\frac{1}{3}$

III. Підсумок уроку.

IV. Домашнє завдання.

Закінчити розв'язування рівнянь, які розглядалися протягом уроку.

Урок 2

Мета: оцінити рівень знань і вмінь учнів розв'язувати рівняння, розвивати методи та прийоми розумової діяльності, навички самоконтролю та само оцінювання, виховувати пізнавальний інтерес до навчання.

Хід уроку

Учні на окремому бланку виконують тематичний тест. На наступному уроці передбачено обговорення результатів тесту: аналіз типових помилок, розв'язування завдань, під час виконання яких виникали труднощі.

Кожне завдання першої частини оцінюється в 1 бал, а другої – в 2 бали. Перше завдання третьої частини оцінюється в 3 бали, а друге – в 4 бали.

Тематичний тест

Частина I

1. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-3} = 0.$$

А. 1; -2; 3.

Б. -2; 3.

В. 1, 3.

Г. 3.

Д. -2, 1.

2. Розв'яжіть рівняння

$$2^{x+3} = 16.$$

А. 1.

Б. 2.

В. 0.

Г. 3.

Д. -1.

3. Знайдіть суму коренів рівняння

$$2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

А. -2,5.

Б. 2.

В. 0.

Г. 3.

Д. 5.

4. Знайдіть корінь рівняння

$$\frac{5}{x} - \frac{4}{3} = 1$$

А. 3.

Б. $\frac{15}{7}$.

В. 1.

Г. -2.

Д. 1, 5.

5. Знайдіть усі значення параметра b , при яких рівняння $\log_3 x = b$ має корені.

А. $b > 0$.Б. b - довільне число.В. $b < 0$.Г. $b > 1$.Д. $b = 0$.

6. Укажіть проміжок, який містить усі корені рівняння

$$\frac{x^2 - 4}{x - 4} = \frac{12}{x - 4}$$

А. $(-5; 2]$ Б. $(-2; 0]$ В. $(0; 2]$.Г. $(2; 5]$.

Д. Інша відповідь.

7. Укажіть відрізок, якому належить найменший корінь рівняння

$$\log_3 x^2 = -2$$

А. Не має коренів.

Б. $[-1; 0]$.В. $[-2; -1]$.Г. $[1; 2]$.

Д. $[0;1]$.

8. Скільки коренів має рівняння

$$-(x-4) \cdot 2 = |x-4| ?$$

А. Жодного.

Б. Три.

В. Два.

Г. Чотири.

Д. Один.

9. Знайдіть суму коренів (або корінь, якщо він єдиний) рівняння

$$(x^2 - 4) \cdot \sqrt{1-x} = 0$$

А. 5.

Б. 4.

В. -1.

Г. 0.

Д. -3.

Частина 2

1. Розв'яжіть рівняння

$$3^{x^2} + 3^{x^2+1} + 3^{x^2+2} = 13 \cdot 3^{x+2}$$

2. Обчисліть добуток коренів рівняння

$$\log^2_5 x + 3 \log_5 x - 4 = 0$$

3. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x^2 + x - 12} = \sqrt{-3x}.$$

Якщо рівняння має один корінь, запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має кілька коренів, запишіть у відповідь їх добуток.

Частина 3

1. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 5x^2 - 16x + 4 = 0$.

2. Знайдіть усі значення параметра a , при яких рівняння $2x^3 + 3x^2 - 12x - a = 0$ має один корінь.